Lourdes Kala Béjar

Álgebra lineal y aplicaciones a la geometría

Tomo 2





Facultad de
Ingeniería Industrial
y de Sistemas

Álgebra lineal y aplicaciones a la geometría. Tomo 2
Primera edición, marzo de 2021

500 ejemplares
Impreso en el Perú / Printed in Peru

Universidad Nacional de Ingeniería
Fondo Editorial EDUNI
Av. Túpac Amaru 210, Rímac - Lima
Teléfono: 4814196
Central telefónica: 4811070 Anexos 7500 y 7501
Correo: fondoeditorial@uni.edu.pe
Facultad de Ingeniería Industrial y de Sistemas
Av. Túpac Amaru 210, Rímac - Lima
Teléfono: 481-1424
Central telefónica: 4811070 Anexo 5226
Correo: fiis@uni.edu.pe

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú Nº 2021-03872

ISBN de la obra completa 978-612-45971-1-4

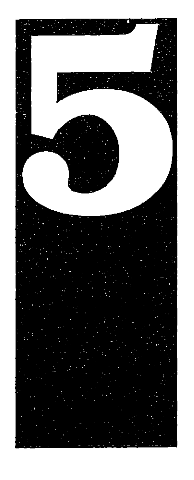
ISBN del tomo 2 978-612-45971-3-8

Impreso en mayo de 2021 por
Gráfica Fénix SRL
Av. Prolongación Arica 1827, Urb. Chacra Ríos Norte - Lima



ÍNDICE GENERAL

Capítulo



NÚMEROS COMPLEJOS. RAÍCES DE ECUACIONES POLINOMIALES

Muchos temas del álgebra lineal traen consigo el problema de la resolución de ecuaciones polinomiales. En muchos casos el sistema de los números reales no es suficiente para solucionarlos. Es por ello que enseguida dedicaremos este capítulo al estudio del sistema de los números complejos y de las propiedades de los polinomios que serán necesarios para el resto del libro. Para muchos lectores este capítulo será un mero repaso, aunque los temas serán tratados desde un nuevo punto de vista.

En el estudio del sistema de los números reales, se encontró que la ecuación

$$x^2 - 4 = 0$$

tiene soluciones racionales $x = \pm 2$, mientras que

$$x^2 - 2 = 0$$

tiene soluciones irracionales $x = \pm\sqrt{2}$.

En ambos casos observamos que las soluciones son números reales (soluciones reales).

Ahora, consideremos la ecuación

$$x^2 + 1 = 0 \tag{5.1}$$

2

Esta ecuación no tiene solución real puesto que

$$x^2 \geq 0; \forall x \in \mathbb{R} \text{ y}$$
$$x^2 + 1 > 0$$

Por lo tanto x que satisface (5.1) no es un número real. Nuestro propósito en este capítulo es extender el sistema de los números reales de modo que la Ecuación (5.1) tenga solución en el nuevo sistema. Los elementos de este nuevo sistema se llaman números complejos.

De este modo un número complejo representa una idea matemática precisa pero que tuvo que abrirse paso en el álgebra, como en otros tiempos, los números racionales, irracionales, negativos, etc. para ser considerado como número.

Enseguida vamos a pasar a definir un conjunto más extenso de números que incluirá a los números reales como un subconjunto, el nuevo sistema de números por definir se llama sistema de los números complejos.

Definición 5.1

El **conjunto de los números complejos**, denotado por $\mathbb{C}$, es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales $z = (x, y)$ donde x es la 1ª coordenada e y es la 2ª coordenada del par ordenado (x, y). Es decir,

$$\mathbb{C} = \{z = (x, y)/x, y \in \mathbb{R}\}$$

Nota

Si $z = (x, y)$ es un número complejo

1) Tanto x como y son números reales.

2) x se llama la **parte real de** z y se denota por $x = \text{Re}\,(z)$.
y se llama la **parte imaginaria de** z y se denota por $y = \text{Img}\,(z)$.

3) Si $x = 0$ entonces $z = (0, y)$ se llama **número imaginario puro.**

4) Si $y = 0$ entonces $z = (x, 0)$ se llama **número real.**

5) Si $x = y = 0$ entonces $z = (0, 0)$ se llama **cero complejo** o **complejo nulo.**

Definición 5.2

Dos números complejos son **iguales**, si sus respectivas coordenadas son iguales entre sí.
Es decir, dados $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$

$$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$$

Enseguida definiremos en $\mathbb{C}$, las operaciones de adición y multiplicación de números complejos.

Definición 5.3

Sean $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ se llama **suma** de z_1 y z_2 y se denota por $z_1 + z_2$, en ese orden al siguiente número complejo

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \qquad \text{(adición)}$$

y se llama **producto** de z_1 y z_2, denotado por $z_1 z_2$, en ese orden al siguiente número complejo

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \qquad \text{(multiplicación)}$$

Ejemplo 5.1

$z_1 = (3, -4),\ z_2 = (-2, \frac{1}{3})$

$$z_1 + z_2 = (3 + (-2), -4 + \frac{1}{3}) = (1, \frac{-11}{3})$$
$$z_1 z_2 = (3(-2) - (-4)(\frac{1}{3}), 3(\frac{1}{3}) + (-4)(-2)) = (-\frac{14}{3}, 9)$$

Ejemplo 5.2

$z_1 = (0, \sqrt{3}),\ z_2 = (-1, \sqrt{2})$

$$z_1 + z_2 = (-1, \sqrt{3} + \sqrt{2})$$
$$z_1 z_2 = (-\sqrt{6}, -\sqrt{3}) = -\sqrt{3}(\sqrt{2}, 1)$$

Definición 5.4

El conjunto $\mathbb{C}$ con las operaciones de adición y multiplicación definidas se llama **sistema de los números complejos** y los elementos de $\mathbb{C}$ se llaman **números complejos**.

Teorema 5.1

El conjunto $\mathbb{C}$ con las operaciones de adición y multiplicación definidas satisface las siguientes propiedades $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

1) **Clausura**

(a) $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$

(b) $z_1 z_2 \in \mathbb{C}$

2) **Propiedades conmutativas**

(a) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

(b) $z_1 z_2 = z_2 z_1$

3) **Propiedades asociativas**

(a) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

(b) $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$

4) **Propiedad distributiva**

(a) $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

5) **Propiedades identidad**

(a) $\exists$ un único elemento $0 = (0,0) \in \mathbb{C} / z + 0 = 0 + z = z, \ \forall z \in \mathbb{C}$

(b) $\exists$ un único elemento $1 = (1,0) \neq 0 \in \mathbb{C} / z1 = 1z = z, \ \forall z \in \mathbb{C}$

6) **Propiedades inversa**

(a) $\forall z = (x, y) \in \mathbb{C}, \exists$ un único elemento $-z = (-x, -y) \in \mathbb{C} / z + (-z) = (-z) + z = 0$

(b) $\forall z \neq 0 \in \mathbb{C}, \exists$ un único elemento $z^{-1} \in \mathbb{C} / z z^{-1} = z^{-1} z = 1$

Nota

1) El cero complejo $0 = (0, 0)$ se llama también **elemento neutro** para la suma.

2) El número complejo $1 = (1, 0)$ se llama **elemento identidad** para el producto.

3) $-z = (-x, -y)$ se llama **inverso aditivo** de $z = (x, y)$.

4) z^{-1} se llama **inverso multiplicativo** de $z \neq 0$.

Demostración. La demostración de estas propiedades es aplicación directa de la definición. Sin embargo demostraremos algunas de ellas.

5a) Sea $z = (x, y)$ y $0 = (a, b)$ números complejos tal que $z + 0 = z$. Es decir

$$(x, y) + (a + b) = (x, y) \Longrightarrow \begin{cases} x + a = x \Longrightarrow a = 0 \\ y + b = y \Longrightarrow b = 0 \end{cases}$$

Por tanto $0 = (0, 0)$ es el **cero complejo**.

6a) Sea $z = (x, y)$ y $-z = (a, b)$ números complejos tal que $z + (-z) = 0$. Es decir

$$(x, y) + (a + b) = (0, 0) \Longrightarrow \begin{cases} x + a = 0 \Longrightarrow a = -x \\ y + b = 0 \Longrightarrow b = -y \end{cases}$$

Por tanto $-z = (-x, -y)$ es el inverso aditivo de $z = (x, y)$.

5b) Sea $z = (x, y) \neq 0$ un número complejo no nulo y $(a, b) \in \mathbb{C}$ tal que $z(a, b) = z$. Es decir

$$(x, y)(a, b) = (x, y) \Longrightarrow (xa - yb, xb + ya) = (x, y) \Longrightarrow \begin{cases} xa - yb = x \\ ya + xb = y \end{cases}$$

$$(x^2 + y^2)a = x^2 + y^2 \Longrightarrow a = 1 \text{ puesto que } x^2 + y^2 \neq 0$$
$$(x^2 + y^2)b = -xy + xy = 0 \Longrightarrow b = 0 \text{ ya que } x^2 + y^2 \neq 0$$

de donde $(a, b) = (1, 0) = 1$ (elemento identidad para el producto)

6b) Sea $z = (x,y) \neq 0$ y $z^{-1} = (a,b)$ su inverso multiplicativo tal que $zz^{-1} = 1$. Es decir

$$(x,y)(a,b) = (1,0) \Longrightarrow (xa - yb, xb + ya) = (1,0) \Longrightarrow \begin{cases} xa - yb = 1 \\ ya + xb = 0 \end{cases}$$

$$(x^2 + y^2)a = x \Longrightarrow a = \frac{x}{x^2+y^2} \text{ ya que } x^2 + y^2 \neq 0$$
$$b = -\frac{ya}{x} = -\frac{y}{x}\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

entonces

$$z^{-1} = \Big(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\Big)$$

es el inverso multiplicativo de $z = (x,y) \neq 0$

◇

Definición 5.5

El conjunto $\mathbb{C}$ provisto de las operaciones de adición y multiplicación y las once propiedades del teorema anterior se llama **campo de los números complejos.**

Como una consecuencia de las propiedades (6a) y (6b) del teorema anterior se dan las siguientes definiciones.

Definición 5.6

Si z_1 y $z_2 \in \mathbb{C}$, la **diferencia** de z_1 y z_2 denotada por $z_1 - z_2$ es el siguiente número complejo

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2).$$

Definición 5.7

Si z_1 y $z_2 \neq 0 \in \mathbb{C}$, el **cociente** de z_1 y z_2 denotado por $\frac{z_1}{z_2}$ es el siguiente número complejo

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}$$

Ejemplo 5.3

Si $z_1 = (3, -4)$ y $(5, 8) \in \mathbb{C}$

$$z_1 - z_2 = (3, -4) + (-5, -8) = (-2, -12)$$

equivale a restar las componentes correspondientes de z_1 y z_2 en ese orden.

Ejemplo 5.4

Si $z_1 = (4, 3)$ y $z_2 = (-2, 1) \neq 0 \in \mathbb{C}$

$$z_2^{-1} = \left(\frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = (4, 3)\left(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right) = (-1, -2)$$

Teorema 5.2

Las siguientes propiedades que se cumplen en el campo real también se verifican en el campo complejo

1) **Propiedades de la cancelación**

(a) $z_1 + z_3 = z_2 + z_3 \Longrightarrow z_1 = z_2$

(b) $z_1 z_3 = z_2 z_3$ y $z_3 \neq 0 \Longrightarrow z_1 = z_2$

2) **Inverso del inverso**

(a) $-(-z) = z$

(b) $(z^{-1})^{-1} = z$ si $z \neq 0$

3) $z0 = 0$

4) $z_1 z_2 = 0 \Longleftrightarrow z_1 = 0$ ó $z_2 = 0$

5) (a) $-(z_1 + z_2) = (-z_1) + (-z_2)$

(b) $(z_1 z_2)^{-1} = z_1^{-1} z_2^{-1}$, $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$

6) (a) $z_1 + z_2 = z_3 \Longleftrightarrow z_2 = z_3 - z_1$

(b) $z_1 z_2 = z_3$ y $z_1 \neq 0 \Longleftrightarrow z_2 = z_1^{-1} z_3$

7) **Propiedades de los signos**

(a) $z_1(-z_2) = (-z_1)(z_2) = -(z_1 z_2)$

(b) $(-z_1)(-z_2) = z_1 z_2$

La demostración de estas propiedades es aplicación directa de la definición y de Teorema 5.1. Se deja la demostración al lector.

Teorema 5.3

Para el cociente de números complejos se dan las siguientes propiedades.

1) Si $z_2 \neq 0$ y $z_4 \neq 0$, entonces

(a) $\frac{z_1}{z_2} \pm \frac{z_3}{z_4} = \frac{z_1 z_4 \pm z_2 z_3}{z_2 z_4}$

(b) $(\frac{z_1}{z_2})(\frac{z_3}{z_4}) = \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}$

(c) $\frac{z_1/z_2}{z_3/z_4} = \frac{z_1 z_4}{z_2 z_3}$ si $z_3 \neq 0$

(d) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z}{z_2 z}$, si $z \neq 0$

2) Si $z \neq 0$ entonces $(-z)^{-1} = -(z^{-1})$

La demostración de este teorema se deja al lector.

5.1 $\mathbb{R}$ como un subcampo de $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$)

Enseguida demostraremos que el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ en cierto sentido se puede considerar como un **subcampo** de $\mathbb{C}$. Es decir, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ es también un subcampo con las mismas operaciones definidas en $\mathbb{C}$.

En efecto, sea

$$\mathbb{C}_0 = \{z \in \mathbb{C} / z = (x, 0), x \in \mathbb{R}\}$$

luego C_0 consta de todos los números complejos cuya segunda coordenada es cero.

Ejemplo 5.5

$0 = (0,0)$ y $1 = (1,0)$ son elementos de $\mathbb{C}_0$

Demostraremos que $\mathbb{C}_0$ es un subcampo de $\mathbb{C}$, es decir que $\mathbb{C}_0$ cumple las once propiedades del Teorema 5.1. Para ello, necesitamos probar la clausura, las propiedades de la identidad e inversa, puesto que las otras propiedades son verdaderas en virtud de que $\mathbb{C}_0 \subset \mathbb{C}$.

1) **Clausura**

(a) Sea $z_1 = (x_1, 0)$ y $z_2 = (x_2, 0)$ elementos de $\mathbb{C}_0$

$$z_1 + z_2 = (x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) \Longrightarrow z_1 + z_2 \in \mathbb{C}_0$$

(b)

$$z_1 z_2 = (x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1 x_2 - 0, x_1(0) + 0(x_2)) = (x_1 x_2, 0) \Longrightarrow z_1 z_2 \in \mathbb{C}_0$$

5. **Propiedades identidad**

$$0 = (0,0) \text{ y } 1 = (1,0) \text{ son elementos de } \mathbb{C}_0$$

6. **Propiedades inversa**

(a) Sea $z = (x, 0) \in \mathbb{C}_0 \Longrightarrow -z = (-x, 0) \in \mathbb{C}_0$.

(b) Sea $z = (x, 0) \neq 0 \in \mathbb{C}_0$, es decir $x \neq 0$ entonces

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + 0^2}, \frac{-0}{x^2 + 0^2}\right) = \left(\frac{1}{x}, 0\right) \in \mathbb{C}_0$$

Por tanto $\mathbb{C}_0$ es un subcampo de $\mathbb{C}$.

Observación.

1) **Inclusión de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$**

Se establece una correspondencia entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}_0$ de modo que no existe distinción entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}_0$, excepto la notación. Veamos

$$\text{Si } x \in \mathbb{R} \Longrightarrow (x,0) \in \mathbb{C}_0 \subset \mathbb{C}$$

Este hecho nos permite afirmar que todo número real es un número complejo ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$) puesto que al número real r le hacemos corresponder el número complejo $(r,0)$ así

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & & \mathbb{C} \\ a & \longrightarrow & (a,0) \\ b & \longrightarrow & (b,0) \\ a+b & \longrightarrow & (a+b,0) = (a,0)+(b,0) \\ a-b & \longrightarrow & (a-b,0) = (a,0)-(b,0) \\ ab & \longrightarrow & (ab,0) = (a,0)(b,0) \\ \frac{a}{b} & \longrightarrow & (\frac{a}{b},0) = \frac{(a,0)}{(b,0)},\ b \neq 0 \end{array}$$

Así pues, todo número real es un número complejo con parte imaginaria cero.

2) **Producto del número real r por el número complejo z**

Si $r \in \mathbb{R}$ y $z = (x,y) \in \mathbb{C}$ entonces

$$rz = (r,0)(x,y) = (rx - 0y, ry + 0x) = (rx, ry)$$

equivale a multiplicar por r cada una de las coordenadas de z.

3) **Forma $x + yi$ del número complejo (x,y)**

Si $z = (x,y)$ entonces

$$\begin{aligned} z &= (x,0) + (0,y) \\ &= x(1,0) + y(0,1) \\ &= x(1) + y(0,1) \\ &= x + y(0,1) \end{aligned}$$

Definición 5.8

El número complejo $(0, 1)$ se denota por i y se llama la **unidad imaginaria**. Es decir $i = (0, 1)$.

Definición 5.9

$z = x + yi$ es la **forma binómica** de denotar al número complejo con parte real x y parte imaginaria y donde $i = (0, 1)$.

Nota

El número $i = (0, 1)$ cumple todas las propiedades del álgebra. Así tenemos que

$$\begin{aligned} i^2 &= (0,1)(0,1) = (0(0) - 1(1), 0(1) + 1(0)) = (-1, 0) = -1 \\ i^3 &= i^2 i = (-1)i = -i \\ i^4 &= i^3 i = (-i)i = 1 \\ i^5 &= i^4 i = i \\ &\vdots \\ i^{4p} &= 1; \ \forall p \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

Definición 5.10

- Si $z = x + 0i = x$ se dice que z es un **número complejo real.**
- Si $z = x + yi$ se dice que z es un **número complejo imaginario.**
- Si $z = yi$ se dice que z es un **número complejo imaginario puro.**

Ejemplo 5.6

De los siguientes números complejos

- 7 es un número real.
- $4 - 5i$ es un número imaginario.
- $2i$ es un número imaginario puro.

Nota

Una ventaja de la notación $z = x + yi$ es que la suma y el producto se pueden efectuar como los binomios en el campo real, reemplazando $i^2 = -1$

Ejemplo 5.7

Si $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) \\ &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) \\ &= x_1 x_2 + x_1 y_2 i + x_2 y_1 i + y_1 y_2 i^2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i \end{aligned}$$

Nota

1) Una distinción importante entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ es que la ecuación $x^2 + 1 = 0$ tiene solución en $\mathbb{C}$, pero no en $\mathbb{R}$. El "Teorema fundamental del álgebra" afirma que toda ecuación polinomial

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

donde $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ y $a_n \neq 0$ tiene al menos una solución en $\mathbb{C}$ y se dice que "$\mathbb{C}$ es algebraicamente completo".

2) Existe otra distinción importante entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

$\mathbb{R}$ es un **cuerpo ordenado** puesto que en $\mathbb{R}$ existe una relación de orden "$<$" que se lee "*menor que*" que satisface las siguientes propiedades $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) $a < b$ ó $a = b$ ó $b < a$ y solamente una de ellas es verdadera (Propiedad de tricotomía).

(b) $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.

(c) $a < b$ entonces $a + c < b + c$.

(d) $a < b$ y $0 < c$ entonces $ac < bc$

Demostraremos que esta relación de orden no está definida en $\mathbb{C}$ y que la propiedad de la tricotomía falla. En efecto, asumiendo que c) y d) fuesen verdaderas en $\mathbb{C}$, consideremos los números i y 0. Claramente $i \neq 0$.

Supongamos que $i < 0$ entonces

$$
\begin{aligned}
i + (-i) &< 0 + (-i) && \text{por c)} \\
0 &< -i \\
(-i)0 &< (-i)(-i) && \text{por d)} \\
0 &< i^2 \\
0 &< -1 \\
0(-i) &< (-1)(-i) && \text{por d)} \\
0 &< i
\end{aligned}
$$

Luego si $i < 0$ entonces $0 < i$, lo que contradice la propiedad de tricotomía. De modo similar se puede demostrar que si $0 < i$ entonces $i < 0$.

Por lo tanto, se dice que $\mathbb{C}$ no es un campo ordenado ya que no tiene sentido indicar que un número complejo es "menor que" otro o que un número complejo sea "positivo" o "negativo".

Sin embargo, $-z$ es el "negativo de z" que significa el **inverso aditivo** de z. Esto último no tiene que ver nada con el orden.

3) La ecuación $x^2 + 1 = 0$ tiene solución en el campo complejo.

De hecho, existen dos soluciones i y $-i$. Usaremos la notación del campo real para escribir

$$
\begin{aligned}
i &= \sqrt{-1} = (0, 1) \\
-i &= -\sqrt{-1} = (0, -1)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 5.8

Expresar $(\frac{1-i}{\sqrt{2}})^4$ en la forma $x+yi$

Solución.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^4 &= \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\\ &= \frac{1}{2}(1-2i+i^2)\frac{1}{2}(1-2i+i^2)\\ &= (-i)(-i) = i^2 = -1\\ &= -1+0i\end{aligned}$$

Ejemplo 5.9

Expresar en la forma $x+yi$,

$$z = \frac{1}{1-\frac{i}{1+\frac{i}{1+i}}}$$

Solución.

$$\begin{aligned}z &= \frac{1}{1-\frac{i}{\frac{1+i+i}{1+i}}} = \frac{1}{1-\frac{i(1+i)}{1+2i}}\\ &= \frac{1}{\frac{1+2i-i(1+i)}{1+2i}} = \frac{1+2i}{2+i}\\ &= (1+2i)(2+i)^{-1} = (1+2i)\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i\right)\\ &= \frac{4}{5}+\frac{3}{5}i\end{aligned}$$

Definición 5.11

Si $z^2 = x+yi$ entonces z se llama la **raíz cuadrada** de $x+yi$.

Ejemplo 5.10

Sea $z = a + bi$ una raíz cuadrada de $7 + 24i$ si es que existe. Entonces

$$z^2 = (a + bi)^2 = 7 + 24i$$
$$(a^2 - b^2) + 2abi = 7 + 24i$$

$$\iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 7 \\ \quad 2ab = 24 \Longrightarrow b = \dfrac{12}{a},\ a \neq 0 \end{cases}$$

$$a^2 - b^2 = 7 \Longrightarrow a^2 - \left(\frac{12}{a}\right)^2 = 7$$
$$\Longrightarrow \quad a^4 - 7a^2 - 144 = 0$$
$$(a^2 - 16)(a^2 + 9) = 0$$
$$a^2 - 16 = 0 \text{ puesto que } a^2 + 9 > 0$$
$$a = \pm 4$$
$$\text{Si } a = 4 \Longrightarrow b = 3$$
$$\text{Si } a = -4 \Longrightarrow b = -3$$

Las raíces cuadradas de $7 + 24i$ son

$$z_1 = 4 + 3i$$
$$z_2 = -4 - 3i$$

Comprobando

$$z_1^2 = (4 + 3i)^2 = (16 - 9) + 2(12)i = 7 + 24i$$
$$z_2^2 = (-4 - 3i)^2 = (-1)^2(4 + 3i)^2 = 7 + 24i$$

5.1.1 Ejercicios propuestos

1) Expresar en la forma $x + yi$ las siguientes operaciones indicadas

a) $[(1, -4) - (5, 2)] - (8, 5)$ b) $(3, 0) + [(1, -7) + (3, 1)]$

c) $\frac{(3,-1)}{(1,4)(2,-5)}$

d) $(5,-1)^2$

e) $(5,-1)^3$

f) $\frac{(0,1)(3,-2)}{(5,4)}$

2) Expresar en la forma $x + yi$

a) $(i-1)^3$

b) $\frac{i}{1+i} + \frac{1-i}{i}$

c) $\frac{i}{1-i+\frac{i}{1+i-\frac{1}{1-i}}}$

d) $\frac{(2-i)(3+4i)}{(1+7i)(1-i)}$

e) $\frac{2+i}{i-2} + \frac{(1-2i)^2(3+2i)}{(3+i)^2(2-i)}$

f) $(1+i)^5$

3) si $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Mostrar que

(a) $z^3 = 1$

(b) $z^2 + z + 1 = 0$

4) Encontrar los números z que satisfacen

a) $z^2 = -5 + 12i$

b) $z^2 = i$

c) $z^2 = -i$

d) $z^2 = -11 + 60i$

e) $z^2 = 13 - 84i$

f) $z^2 = 9 + 40i$

Definición 5.12

Si p es un número real no negativo ($p \geq 0 \in \mathbb{R}$) entonces $\sqrt{-p} = i\sqrt{p}$, donde $(\sqrt{p})^2 = p$

Ejemplo 5.11

$$\sqrt{-4} = i\sqrt{4} = 2i, \qquad \sqrt{-5} = i\sqrt{5}, \qquad \sqrt{-1} = i\sqrt{1} = i$$

Propiedades

1) $(\sqrt{-p})^2 = -p$, si p es un número real no negativo.

2) Si p y q son números reales positivos. Entonces

(a) $\sqrt{-p}\sqrt{-q} \neq \sqrt{(-p)(-q)}$

(b) $\frac{\sqrt{-p}}{\sqrt{-q}} = \sqrt{\frac{-p}{-q}}$

(c) $\sqrt{-p}\sqrt{q} = \sqrt{(-p)q}$

Demostración. 1)

$$(\sqrt{-p})^2 = \sqrt{-p}\sqrt{-p} = (i\sqrt{p})(i\sqrt{p}) = i^2 p = -p$$

2) (a) $\sqrt{-p}\sqrt{-q} = (i\sqrt{p})(i\sqrt{q}) = i^2\sqrt{p}\sqrt{q} = -\sqrt{pq} \neq \sqrt{(-p)(-q)}$

(b) $\frac{\sqrt{-p}}{\sqrt{-q}} = \frac{i\sqrt{p}}{i\sqrt{q}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}} = \sqrt{\frac{p}{q}} = \sqrt{\frac{-p}{-q}}$

(c)

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{-p}\sqrt{q} &= (i\sqrt{p})\sqrt{q} = i\sqrt{pq} \\ \sqrt{p}\sqrt{-q} &= \sqrt{p}(i\sqrt{q}) = i\sqrt{pq} \end{aligned}\right\} \quad \text{cumple la igualdad}$$

$\diamond$

Ejemplo 5.12

Expresar en la forma $x + yi$

1) $3 - \sqrt{-1} = 3 - i\sqrt{1} = 3 - i$

2) $\sqrt{-9} + \sqrt{3} = i\sqrt{9} + \sqrt{3} = \sqrt{3} + 3i$

3) $\sqrt{-4}\sqrt{-9}\sqrt{-16} = (i2)(i3)(i4) = 0 - 24i$

4) $\frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{-2}\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{-5}} = \frac{2i}{i\sqrt{2}\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}}{i\sqrt{5}} = 1 + \frac{1}{i} = 1 - i$

Ejemplo 5.13

Encontrar z tal que

1) $z^2 - 4z + 13 = 0$

2) $z^2 - 2z + 6 = 0$

3) $z^2 - 2\sqrt{2}z - 1 = 0$

4) $9z^2 - 72z + 148 = 0$

5.2 Propiedades de exponentes

Se ha definido por inducción z^n para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, ahora extenderemos la definición para exponentes enteros negativos y exponente cero en la siguiente forma

$$z^0 = 1, \text{ si } z \neq 0$$

$$z^{-n} = (z^{-1})^n = \left(\frac{1}{z}\right)^n, \ \forall n \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } z \neq 0$$

Nota

No está definido 0^n, $\forall$ entero $n \leq 0$

Teorema 5.4

Para todo $m, n \in \mathbb{Z}$ y z, z_1, z_2 números complejos se verifican las siguientes propiedades

1) $z^m z^n = z^{m+n}$

2) $\frac{z^m}{z^n} = z^{m-n}$, $z \neq 0$

3) $(z^m)^n = z^{mn}$

4) $(z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n$

5) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \frac{z_1^n}{z_2^n}$, $z_2 \neq 0$

Nota

1) Las propiedades de exponentes que se verifican para los números reales, también se verifican para los números complejos.

2) Si $\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ es un conjunto de números enteros y z un número complejo para el cual las siguientes potencias están definidas. Entonces

$$z^{k_1} z^{k_2} \ldots z^{k_n} = z^{k_1+k_2+\cdots+k_n}$$

(Si $z = 0 \Longrightarrow k_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$).

3) Si $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ es un conjunto de n números complejos y k un entero fijo para el cual z_j^k está definido para $j = 1, 2, \ldots, n$. Entonces

$$(z_1 z_2 \cdots z_n)^k = z_1^k z_2^k \cdots z_n^k$$

5.3 El conjugado de un número complejo

Un número importante asociado a z es su conjugado.

Definición 5.13

Si $z = (x, y)$ es un número complejo, entonces el **conjugado complejo** de z o simplemente **conjugado** de z denotado por $\bar{z}$ (que se lee z-raya), es el siguiente número complejo $\bar{z} = (x, -y)$

Nota

1) $\bar{z}$ se obtiene de z reemplazando la parte imaginaria de z por su negativo. Entonces se tiene que

$$\text{Re}\,(\bar{z}) = \text{Re}\,(z)$$
$$\text{Img}\,(\bar{z}) = -\text{Img}\,(z)$$

2) El proceso de formar el conjugado de un número se llama **conjugación**.

Ejemplo 5.14

$$\overline{7 - 5i} = 7 + 5i$$
$$\overline{-7 - 5i} = -7 + 5i$$
$$\overline{7 + 5i} = 7 - 5i$$

Teorema 5.5

Si $z = x + yi$ entonces

1) $z + \bar{z} = 2x = 2\text{Re}\,(z)$

2) $z - \bar{z} = 2yi = 2\text{Img}\,(z)$

3) $z = \bar{z} \Longleftrightarrow z$ es real

4) $z = -\bar{z} \Longleftrightarrow z$ es complejo imaginario puro

5) $z\bar{z} = x^2 + y^2$

6) $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x-yi}{x^2+y^2}$

La prueba de este teorema es aplicación directa de la definición.

Nota

La Propiedad 6 de este teorema nos indica que el conjugado de z facilita el cálculo del cociente de los números complejos.

Ejemplo 5.15

Si $z_1 = 1 - 3i,\ z_2 = -2 + 5i$. Calcular $\frac{z_1}{z_2}$

Solución.

Puesto que $z_2 \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= z_1 z_2^{-1} = (1-3i)\frac{-2-5i}{(-2)^2+(-5)^2} \\ &= \frac{(1-3i)(-2-5i)}{29} = \frac{-17+i}{29}\end{aligned}$$

O también

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{(1-3i)(-2-5i)}{(-2+5i)(-2-5i)} \\ &= \frac{-17+i}{(-2)^2+(5)^2} = \frac{-17+i}{29}\end{aligned}$$

Las propiedades básicas de la conjugación se dan en el siguiente teorema.

Teorema 5.6

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

1) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

2) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$

3) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, si $z_2 \neq 0$.

5) $\bar{\bar{z}} = z$

Demostración. La demostración de este teorema es aplicación directa de la definición y se deja como tarea al lector ◇

Nota

Por el Principio de Inducción Matemática, la suma y el producto de n números complejos están definidos.

1) La suma y producto $n \geq 3$ números complejos se define por inducción así.

Si $n = 3$, entonces

$$z_1 + z_2 + z_3 = (z_1 + z_2) + z_3$$
$$z_1 z_2 z_3 = (z_1 z_2) z_3$$

y asumiendo que $z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ y $z_1 z_2 \cdots z_n$ están definidos, se define la suma y producto de $n + 1$ números complejos por:

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n + z_{n+1} = (z_1 + z_2 + \cdots + z_n) + z_{n+1}$$
$$z_1 z_2 \cdots z_n z_{n+1} = (z_1 z_2 \cdots z_n) z_{n+1}$$

2) Las potencias de z están definidas de modo similar se tiene que

$$z^1 = z$$

y asumiendo que z^n está definido $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, z^{n+1} se define por

$$z^{n+1} = z^n z$$

Definición 5.14

z^n se llama la **potencia n-ésima** de z donde $n \in \mathbb{Z}^+$

Teorema 5.7

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$

1) $\overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_n} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \cdots + \bar{z}_n$

2) $\overline{z_1 z_2 \cdots z_n} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \cdots \bar{z}_n$

3) $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$

5.4 Representación gráfica de un número complejo

Teniendo en cuenta que el número complejo $z = x + yi$ y el vector $\bar{a} = (x, y)$ están asociados con el mismo par ordenado (x, y) de números reales, resulta natural identificar z con $\bar{a}$ y afirmar que z es un vector. Además, si

$$z_1 = x_1 + y_1 i, \qquad z_2 = x_2 + y_2 i$$
$$\bar{a} = (x_1, y_1), \qquad \bar{b} = (x_2, y_2)$$

se tiene que

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$
$$\bar{a} + \bar{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

y $\forall r \in \mathbb{R}$

$$r z_1 = (r x_1) + (r y_1)i$$
$$r\bar{a} = (r x_1, r y_1)$$

De este modo existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto $\mathbb{C}$ y el conjunto $\mathbb{R}^2$, espacios vectoriales en los cuales se preserva la operación de adición y multiplicación por escalares.

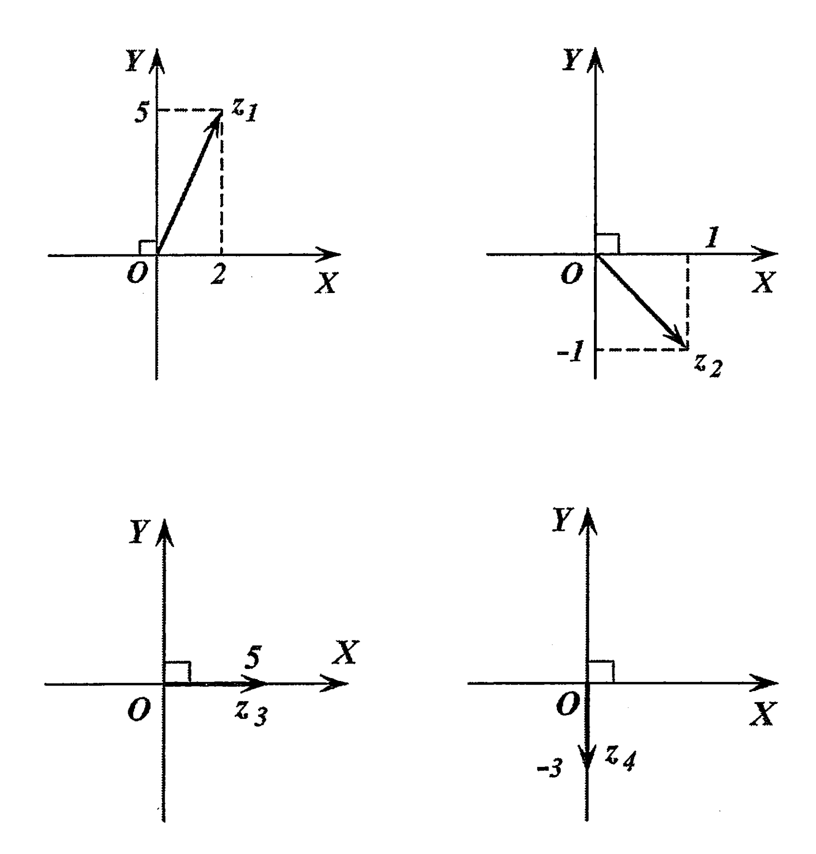
Por ello, no es nada sorprendente que los radio vectores de $\mathbb{R}^2$ suministren una representación geométrica conveniente de los números complejos.

En consecuencia, un número complejo z se puede representar en un sistema de coordenadas XY con origen fijo O localizando Re (z) a lo largo del eje X (eje real) y el Img (z) a lo largo del eje Y (eje imaginario) y el plano XY se llama **plano complejo** (no olvidar que esta denominación es convencional).

Entonces resulta geométricamente evidente que el radio vector (x, y) de $\mathbb{R}^2$ representa al número $x + yi = (x, y)$ de $\mathbb{C}$

Ejemplo 5.16

Representar en el plano complejo $z_1 = 2 + 5i,\ z_2 = 1 - i,\ z_3 = 5 + 0i,\ z_4 = 0 - 3i$.



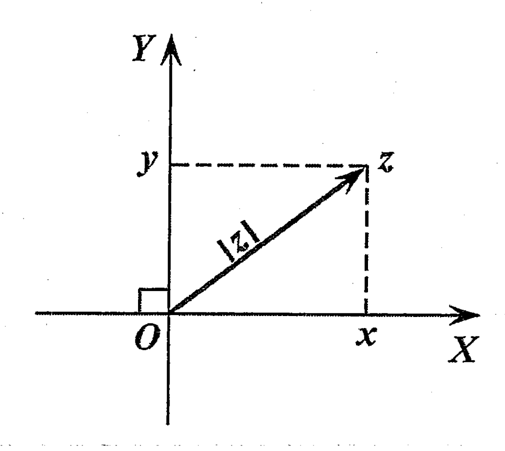
5.5 Valor absoluto o módulo de un número complejo

Definición 5.15

Sea $z = x + yi$ un número complejo. El **valor absoluto** o **módulo** de z, denotado por $|z|$ es la longitud del radio vector (x, y).
Es decir

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

En la figura



Ejemplo 5.17

Calcular el módulo de los siguientes números complejos

1) $|1 - 7i| = \sqrt{(1)^2 + (-7)^2} = 5\sqrt{2}$

2) $|-3 + 5i| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{34}$

3) $|2i| = \sqrt{(0)^2 + (2)^2} = 2$

Nota

1) El módulo o valor absoluto de $z = x + yi$ es un número real no negativo.

2) Si z es un número real entonces

$$z = x + 0i$$
$$|z| = |x + 0i| = \sqrt{x^2}$$

De esta forma vemos que la definición de $|z|$ en el campo complejo es consistente con la definición de $|x|$ en el campo real. Por ejemplo

$$|5| = \sqrt{(5)^2} = 5$$
$$|-5| = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = -(-5)$$

Las propiedades del valor absoluto o módulo de un número complejo se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 5.8

Para todo número complejo z, z_1 y z_2

1) (a) $|\text{Re}\,(z)| \leq |z|$

   (b) $|\text{Img}\,(z)| \leq |z|$

2) $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$

3) (a) $|\bar{z}| = |z|$

   (b) $z\bar{z} = |z|^2$

4) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

5) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$

6) $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$

7) (a) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Desigualdad triangular)

   (b) $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

   (c) $|z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|$

   (d) $|z_1 - z_2| \leq |z_1 - z| + |z - z_2|$

Demostración. Para la demostración hacemos uso del hecho de que si a y b son números reales no negativos, entonces

$$a = b \Longleftrightarrow a^2 = b^2$$

$$a \leq b \Longleftrightarrow a^2 \leq b^2$$

3a) Si $z = (x, y)$ entonces

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = |\bar{z}|$$

3b)

$$z\bar{z} = (x, y)(x, -y) = (x^2 + y^2, 0) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

4)

$$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 &= (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) \qquad \text{por propiedad 3b)} \\ &= (z_1 z_2)(\bar{z}_1 \bar{z}_2) \\ &= (z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2) \\ &= |z_1|^2 |z_2|^2 \end{aligned}$$

Sacando las raíces cuadradas a ambos lados, queda demostrada la propiedad.

5)

$$|z_1| = \left| \frac{z_1}{z_2} z_2 \right| \text{ si } z_2 \neq 0$$

Usando la propiedad 4)

$$|z_1| = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| |z_2| \Longrightarrow \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ si } z_2 \neq 0$$

7a)

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) \\ &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + z_1 \bar{z}_2 + \overline{z_1 \bar{z}_2} = |z_2|^2 \end{aligned} \tag{5.2}$$

pero

$$z_1 \bar{z}_2 + \overline{z_1 \bar{z}_2} = 2\text{Re}\,(z_1 \bar{z}_2) \leq 2|z_1 \bar{z}_2| = 2|z_1||\bar{z}_2| = 2|z_1||z_2|$$

Reemplazando este resultado en (5.2)

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$$

Por lo tanto

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

7c) Para probar que $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$ hay que demostrar que

$$-|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$$

Tomemos

$$z_1 = (z_1 - z_2) + z_2$$

$$|z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2| \qquad \text{(Prop. 7a)}$$

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \qquad (5.3)$$

Si hacemos

$$-z_2 = (z_1 - z_2) - z_1$$

$$|-z_2| = |(z_1 - z_2) - z_1| \leq |z_1 - z_2| + |z_1| \qquad \text{(Prop. 7b)}$$

$$|z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_1|$$

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_1 - z_2|$$

$$|z_1| - |z_2| \geq -|z_1 - z_2| \qquad (5.4)$$

De (5.3) y (5.4)

$$-|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$$

con lo que queda probada la propiedad.



Nota

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff z_2 = tz_1 \; \forall t > 0, \text{ donde } t \in \mathbb{R}$$

sabemos que

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\text{Re}\,(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2 \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} z_1\bar{z}_2 &= z_1(\overline{tz_1}) = z_1(t\bar{z}_1) \\ &= t(z_1\bar{z}_1) = t|z_1|^2 \\ &= t|z_1||z_1| = |z_1|(t|z_1|) \\ &= |z_1||tz_1| = |z_1||z_2|, \; t > 0 \end{aligned}$$

En (5.5)

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$$

Por lo tanto se cumple la igualdad en la desigualdad triangular cuando las coordenadas de los números complejos son proporcionales respectivamente.

Corolario

Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$

1) $|z_1 z_2 \cdots z_n| = |z_1||z_2| \cdots |z_n|$

2) $|z^n| = |z|^n$

3) $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdot + |z_n|$

5.5.1 Ejercicios propuestos

1) D.q. si $z_1 z_2 \cdots z_n = 0$ entonces $z_k = 0$ para algún $k = 1, 2, \ldots, n$ (Es decir, el producto de n números complejos es cero si uno de los números es cero)

2) Expresar en términos de números reales solamente

(a) $\left|-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|$

Rpta: 1

(b) $\left|\frac{1+xi}{1-xi}\right|$, si $x \in \mathbb{R}$

(c) $|x^2-1+2xi|$, si $x \in \mathbb{R}$

Rpta: x^2+1

(d) $|(1-xi)^2-(1+xi)^2|,\ x \in \mathbb{R}$

(e) $|(2+3i)^2-(1-4i)^2|$

Rpta: $10\sqrt{5}$

3) Encontrar todos los números complejos z tales que Re $(z^2)=0$ y $|z|=1$

Rpta: $(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i)$

4) D.q. $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$

5) Encontrar todos los números z tal que

(a) $z=\bar{z}^2$

Rpta: $0, 1, (-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i)$

(b) $z=\bar{z}^3$

6) (a) Si $|z|\leq 2$, encontrar la menor cota superior para todos los números reales dado por $|1+z+z^2+z^3+z^4|$

(b) Sean

$$A=\{z/|z|\leq 3\}$$
$$B=\{x/x=|1+z+z^2+z^3|\text{ para } z\in A\}$$

Encontrar la menor cota superior de B

Encontrar un número $z\in A$ para el cual el correspondiente valor de $x\in B$ es igual a la menor cota superior

7) D.q. si $|z_1|\neq|z_2| \Longrightarrow \left|\frac{z_1}{z_2+z_3}\right|\leq\frac{|z_1|}{||z_2|-|z_3||}$

8) D.q. $|z|\sqrt{2}\geq|\text{Re }(z)+\text{Img }(z)|$

9) D.q. $\left|\frac{\text{Re }(z)+\text{Img }(z)}{\sqrt{2}}\right|\leq|z|\leq|\text{Re }(z)|+|\text{Img }(z)|$

5.6 Forma exponencial de un número complejo

Si $z = x + yi$ es un número complejo, entonces

$$e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \tag{5.6}$$

usando serie de potencias, ensayaremos una demostración de

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y \text{ donde } y \in \mathbb{R}$$

se sabe que

$$\begin{aligned}
e^y &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!} = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \cdots \\
\operatorname{sen} y &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots \\
\cos y &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
e^{iy} &= 1 + (iy) + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \cdots \\
&= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right) \\
&= \cos y + i \operatorname{sen} y
\end{aligned}$$

Nota

En particular si en (5.6) se toma $x = 0$ entonces

$$\begin{aligned}
e^z = e^{0+yi} &= e^0 e^{yi} = e^0(\cos y + i \operatorname{sen} y) \\
&= \cos y + i \operatorname{sen} y = (\cos y, \operatorname{sen} y)
\end{aligned}$$

Definición 5.16

El número complejo

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta)$$

donde θ es un número real medido en radianes, se llama **exponencial compleja** o **fórmula de Euler.**[1]

Nota

Como $\cos(-\theta) = \cos\theta$ y $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta$, entonces

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\,\text{sen}(-\theta) = \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta = (\cos\theta, -\text{sen}\,\theta)$$

Propiedades

1) $e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

2) $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

3) $e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^{i0} = (\cos 0 + i\,\text{sen}\,0) = (1,0) = 1$

4) $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1}e^{-i\theta_2} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

5) $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, $\quad \text{sen}\,\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

6) $i^i = (e^{i\frac{\pi}{2}})^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$

5.7 Forma polar de un número complejo

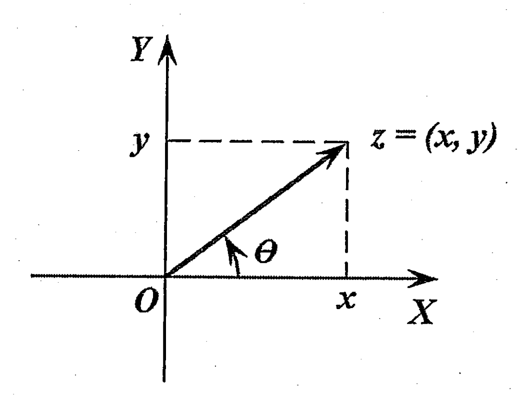
La representación geométrica de los números complejos sugiere otra forma de escribirlos.

[1]Leonard Euler, matemático suizo (1707–1783)

Definición 5.17

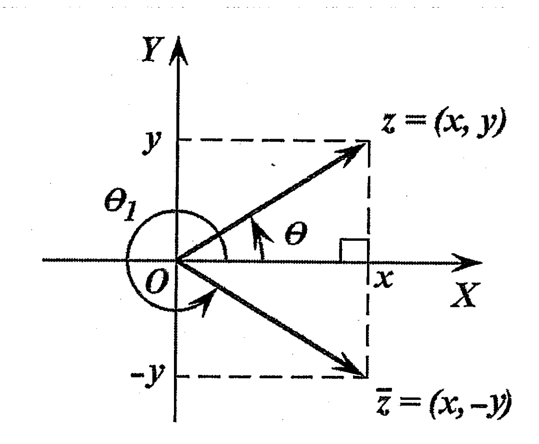
Si $z = (x, y) \in \mathbb{C}, z \neq 0$, el **argumento** o **amplitud** de z, denotado por $\arg(z)$ o amp (z) es una medida en radianes del ángulo de inclinación θ del vector (x, y). Es decir

$$\arg(z) = \theta \text{ donde } 0 \leq \theta < 2\pi$$



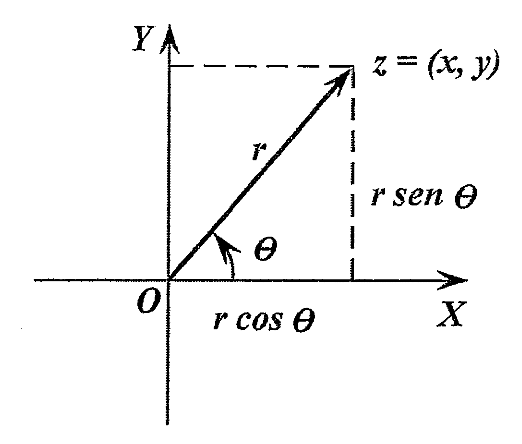
Nota

1) Si $\theta = \arg(z)$ entonces $\arg(\bar{z}) = \theta_1 = 2\pi - \theta$



Gráficamente $\bar{z}$ es el simétrico de z con respecto al eje real X

2) El punto (x, y) se puede representar en términos de las coordenadas polares (r, θ). Es decir



Si $r = |z|$ y $\theta = \arg(z)$ entonces $x = r\cos\theta,\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ y

$$\begin{aligned} z = (x, y) &= (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) \\ &= r(\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta) \\ &= re^{i\theta} \end{aligned}$$

Definición 5.18

$z = re^{i\theta}$ se llama **forma polar** del número complejo z, donde $r = |z|$ y $\theta = \arg(z)$.

Nota

Si $z = re^{i\theta}$ entonces $\bar{z} = re^{-i\theta}$ puesto que

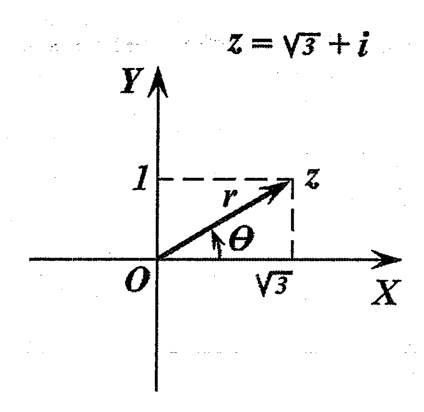
$$|z| = |\bar{z}| = r \text{ y } \arg(\bar{z}) = -\theta = -\arg(z)$$

Ejemplo 5.18

Expresar en la forma polar los siguientes números complejos

1) $z = \sqrt{3} + i$

$$\begin{aligned} r = |z| &= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = 2 \\ \tan\theta &= \frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} = \arg(z) \\ z &= 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\Big(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\Big) \end{aligned}$$



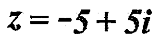
2) $z = -5 + 5i$

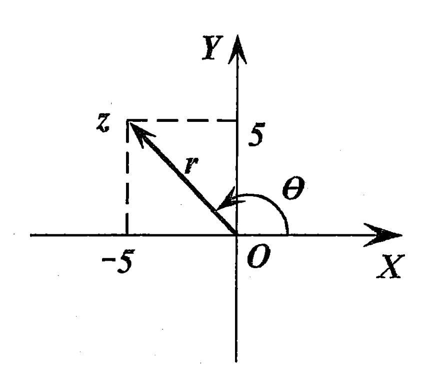
$$r = |z| = \sqrt{(-5)^2 + (5)^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\tan\alpha_r = \left|\frac{5}{-5}\right| = 1 \Longrightarrow \alpha_r = \frac{\pi}{4} \text{ (ángulo de referencia)}$$

$$\theta = \arg(z) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$z = 5\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = 5\sqrt{2}\Big(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}\Big)$$





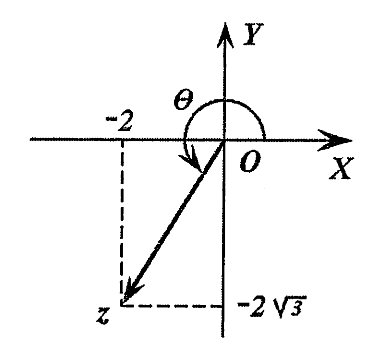
3) $z = -2 - 2\sqrt{3}i$

$$r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 4$$

$$\tan\alpha_r = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3} \Longrightarrow \alpha_r = \frac{\pi}{3} \text{ (ángulo de referencia)}$$

$$\theta = \arg(z) = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$$z = 4e^{i\frac{4\pi}{3}} = 4\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3}\right)$$



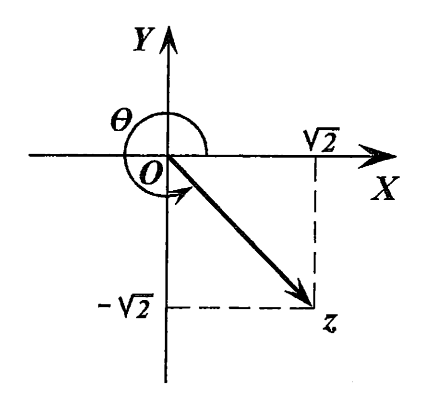
4) $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

$$r = |z| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$$

$$\tan\alpha_r = \left|\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right| = 1 \Longrightarrow \alpha_r = \frac{\pi}{4} \text{ ángulo de referencia}$$

$$\theta = \arg(z) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

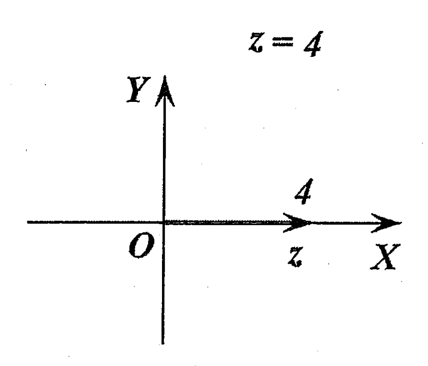
$$z = 2e^{i\frac{7\pi}{4}} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)$$



5) $z = 4$

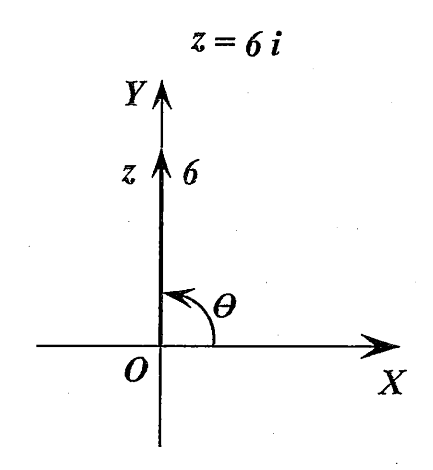
$$z = (4, 0)$$

$$r = |z| = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$$
$$\arg(z) = \theta = 0$$
$$z = 4e^{i0} = 4(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$$



6) $z = 6i$

$$z = (0, 6)$$
$$r = |z| = \sqrt{0^2 + 6^2} = 6$$
$$\arg(z) = \theta = \frac{\pi}{2}$$
$$z = 6e^{i\frac{\pi}{2}} = 6\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$$



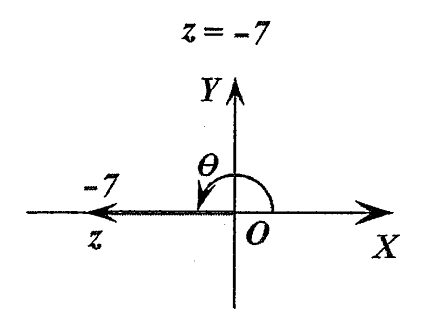
7) $z = -7$

$$z = (-7, 0)$$

$$r = |z| = \sqrt{(-7)^2 + 0^2} = 7$$

$$\arg(z) = \theta = \pi$$

$$z = 7e^{i\pi} = 7(\cos\pi + i\ \mathrm{sen}\,\pi)$$



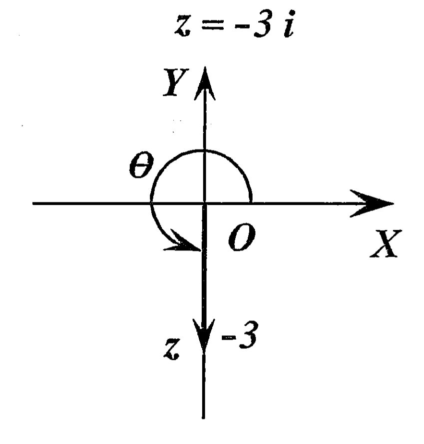
8) $z = -3i$

$$z = (0, -3)$$

$$r = |z| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3$$

$$\arg(z) = \theta = \frac{3\pi}{2}$$

$$z = 3e^{i\frac{3\pi}{2}} = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\ \mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right)$$



Nota

Queda claro que la forma polar de un número complejo $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ donde $r = |z|$ y $\theta = \arg(z)$, $0 \leq \theta < 2\pi$.
Por ejemplo

1) $z = 3(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4})$ es la forma polar de z.

2) $z = -2(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3})$ no es la forma polar de z pero si hacemos

$$\begin{aligned} z &= 2\Big(-\cos\frac{\pi}{3} - i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\Big) \\ &= 2\Big(\cos(\pi + \frac{\pi}{3}) + i \operatorname{sen}(\pi + \frac{\pi}{3})\Big) \end{aligned}$$

es la forma polar de z.

3) $z = \operatorname{sen}\theta + i \cos\theta$ no es la forma polar de z pero si hacemos

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

es la forma polar de z.

4) $z = \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta$ no es la forma polar de z pero si hacemos

$$\begin{aligned} z &= \cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta) \text{ ó} \\ z &= \cos(2\pi - \theta) + i \operatorname{sen}(2\pi - \theta) \end{aligned}$$

son dos formas polares de z

5.8 Producto y cociente de números complejos en su forma polar

Definición 5.19

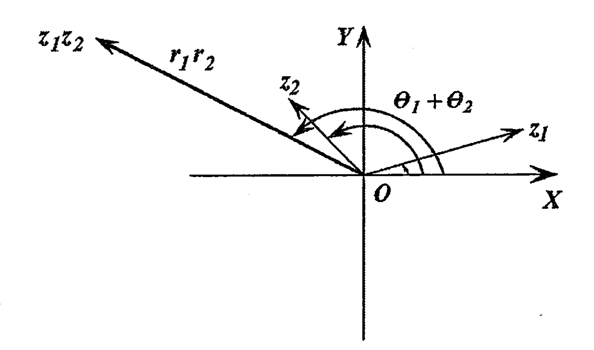
Si $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ entonces el **producto** $z_1 z_2$ tiene la siguiente forma

$$z_1 z_2 = (r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

Es decir

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1||z_2|$$
$$\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg(z_1) + \arg z_2$$

Gráficamente



Definición 5.20

Si $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ entonces el **cociente** $\frac{z_1}{z_2}$ donde $z_2 \neq 0$ tiene la siguiente forma

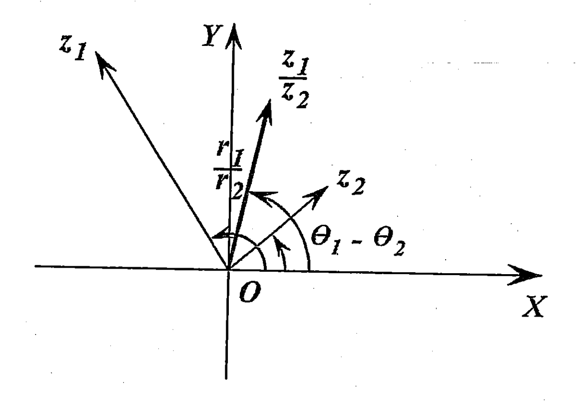
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

Es decir

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 = \arg(z_1) - \arg z_2$$

Gráficamente



Nota

La forma polar de un número complejo es muy conveniente para efectuar operaciones de multiplicación y división y para encontrar potencias y raíces de números complejos.

5.9 Potencia entera de un número complejo en su forma polar

El producto de dos números complejos en su forma polar se puede generalizar para n números complejos. Veamos

1) Si $z_1 = r_1e^{i\theta_1}, z_2 = r_2e^{i\theta_2}, \ldots, z_n = r_ne^{i\theta_n}$ entonces

$$z_1z_2\cdots z_n = (r_1e^{i\theta_1})(r_2e^{i\theta_2})\cdots(r_ne^{i\theta_n}) = (r_1r_2\cdots r_n)e^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}$$

donde

$$|z_1z_2\cdots z_n| = r_1r_2\cdots r_n = |z_1||z_2|\cdots|z_n|$$
$$\arg(z_1z_2\cdots z_n) = \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n = \arg(z_1) + \arg(z_2) + \arg(z_n)$$

2) Si en el resultado anterior consideramos $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z = re^{i\theta}$ donde $r = |z|$, $\theta = \arg(z)$

$$z_1 z_2 \cdots z_n = \underbrace{zz \cdots z}_{n \text{ factores}} = \underbrace{(re^{i\theta})(re^{i\theta}) \cdots (re^{i\theta})}_{n \text{ factores}}$$

entonces

$$z^n = (\underbrace{rr \cdots r}_{n \text{ factores}})e^{i\overbrace{(\theta + \theta + \cdots + \theta)}^{n \text{ sumandos}}} = r^n e^{in\theta} \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

donde $|z^n| = |z|^n = r^n$ y $\arg(z^n) = n \arg(z) = n\theta$

Definición 5.21

Si $z = re^{i\theta}$ donde $r = |z|$ y $\theta = \arg(z)$, la **potencia n-ésima** de z, denotada por z^n, es el siguiente número complejo

$$z^n = r^n e^{in\theta}, \ \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

donde

$$|z^n| = r^n = |z|^n$$
$$\arg(z^n) = n\theta = n \arg(z)$$

Nota

Cuando $r = 1$ entonces

$$z^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i \operatorname{sen} \theta = (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n$$

esta fórmula se conoce como la **fórmula de De Moivre**[2]

Ejemplo 5.19

Calcular $(-1 + i)^7$

[2] Abraham De Moivré, matemático francés (1667–1754)

Solución.
Si $z=-1+i,\ |z|=\sqrt{2},\ \theta=\arg(z)=\frac{3\pi}{4}$ entonces $z=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$$\begin{aligned}
z^7 &= (\sqrt{2})^7 e^{i7(\frac{3\pi}{4})} = (\sqrt{2})^7 e^{i(\frac{21\pi}{4})}\\
&= (\sqrt{2})^7 e^{i(\frac{5\pi}{4})} = (\sqrt{2})^7 e^{i(\pi+\frac{\pi}{4})}\\
&= (\sqrt{2})^7 (\cos(\pi+\frac{\pi}{4}) + i\ \mathrm{sen}(\pi+\frac{\pi}{4}))\\
&= (\sqrt{2})^7 (-\cos(\frac{\pi}{4}) - i\ \mathrm{sen}(\frac{\pi}{4}))\\
&= 8\sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}})\\
&= -8-8i
\end{aligned}$$

Ejercicio 5.1

Calcular $\frac{1}{(1+i\sqrt{3})^9}$

Solución.
Si $z=1+i\sqrt{3},\ |z|=2,\ \theta=\arg(z)=\frac{\pi}{3}$ entonces $z=2e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$z^9 = 2^9 e^{i9(\frac{\pi}{3})} = 2^9 e^{i3\pi} = 2^9(\cos\pi + i\ \mathrm{sen}\,\pi) = -2^9$$

luego

$$\frac{1}{(1+i\sqrt{3})^9} = \frac{1}{-2^9} = -2^{-9}$$

Ejemplo 5.20

Calcular

$$\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$$

Solución.
En este caso podemos hacer uso del álgebra de los números complejos

$$\begin{aligned}
\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}} &= \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{n-2}(1+i)^2\\
&= i^{n-2}(i+i)^2
\end{aligned}$$

$$= 2i^{n-1}$$
$$= 2e^{i(n-1)\frac{\pi}{2}}$$

Ejercicio 5.2

Si $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$. Calcular $(1+z)^n$

Solución.

$$\begin{aligned} 1+z &= 1 + (\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) \\ &= (1+\cos\theta) + i\,\text{sen}\,\theta \\ &= 2\cos^2\frac{\theta}{2} + i\left(2\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

luego

$$(1+z)^n = (2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}})^n = 2^n\cos^n\frac{\theta}{2}e^{in\frac{\theta}{2}}$$

Ejemplo 5.21

Simplificar $(1+z)^n$ donde $z = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Solución.

$$\begin{aligned} z &= \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} \\ &= \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) + i\,\text{sen}(\pi - \frac{\pi}{3}) \\ &= -\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$1+z = 1 + (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

entonces

$$|1+z| = 1 \text{ y } \arg(1+z) = \frac{\pi}{3}$$

$1+z = e^{i\pi/3}$ entonces $(1+z)^n = e^{i\frac{n\pi}{3}}$

Ejemplo 5.22

Si

$$z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \text{ y } z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

Calcular $z_1^n + z_2^n$

Solución.

$$z_1 = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i) \Longrightarrow |z_1| = 1,\ \theta_1 = \arg(z_1) = \frac{5\pi}{6} \Longrightarrow z_1 = e^{\frac{i5\pi}{6}}$$
$$z_2 = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}-i) \Longrightarrow |z_2| = 1,\ \theta_2 = \arg(z_2) = \frac{7\pi}{6} \Longrightarrow z_2 = e^{\frac{i7\pi}{6}}$$

$$\begin{aligned} z_1^n + z_2^n &= e^{in\frac{5\pi}{6}} + e^{in\frac{7\pi}{6}} \\ &= (\cos 5\frac{n\pi}{6} + i \operatorname{sen} 5\frac{n\pi}{6}) + i(\cos 7\frac{n\pi}{6} + i \operatorname{sen} 7\frac{n\pi}{6}) \\ &= (\cos 5\frac{n\pi}{6} + \cos 7\frac{n\pi}{6}) + i(\operatorname{sen} 5\frac{n\pi}{6} + \operatorname{sen} 7\frac{n\pi}{6}) \qquad (5.7) \end{aligned}$$

Se sabe que

$$\cos A + \cos B = 2\cos(\frac{A+B}{2})\cos(\frac{A-B}{2})$$
$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2\operatorname{sen}(\frac{A+B}{2})\cos(\frac{A-B}{2})$$

Si hacemos $A = \frac{7n\pi}{6}$, $B = \frac{5n\pi}{6}$, $\frac{A+B}{2} = 2n\pi$ y $\frac{A-B}{2} = \frac{n\pi}{3}$.
Luego en (5.7)

$$\begin{aligned} z_1^n + z_2^n &= (2\cos 2n\pi \cos\frac{n\pi}{3}) + i(2\operatorname{sen} 2n\pi \cos\frac{n\pi}{3}) \\ &= 2(1)^n \cos\frac{n\pi}{3} + 2i(0)^n \cos\frac{n\pi}{3} \\ &= 2\cos\frac{n\pi}{3} \end{aligned}$$

Ejemplo 5.23

D.q. si $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$ entonces

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta$$

donde $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{Z}^+$

Solución.

Si $z = re^{i\theta}$ entonces $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$ donde $r > 0$

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} &= re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta} \\ &= r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) + \frac{1}{r}(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta) \end{aligned}$$

entonces

$$2\cos\theta = (r + \frac{1}{r})\cos\theta + i(r - \frac{1}{r})\,\text{sen}\,\theta$$

si y sólo si

$$\begin{cases} r + \frac{1}{r} = 2 \Longrightarrow r^2 - 2r + 1 = 0 \Longrightarrow r = 1 \\ (r - \frac{1}{r})\,\text{sen}\,\theta = 0 \Longrightarrow \frac{r^2 - 1}{r}\,\text{sen}\,\theta = 0 \end{cases}$$

$(\frac{r^2-1}{r})\,\text{sen}\,\theta = 0$ entonces

$$\begin{aligned} r^2 - 1 = 0 \ &\text{o} \ \text{sen}\,\theta = 0 \\ r = \pm 1 \ &\text{o} \ \text{sen}\,\theta = 0 \Longleftrightarrow \theta = k\pi \end{aligned}$$

Por tanto $r = 1$ y $\theta = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}^+$ y $z = e^{i\pi}$.

Luego

$$\begin{aligned} z^n + \frac{1}{z^n} &= e^{in\pi} + \frac{1}{e^{in\pi}} \\ &= e^{in\pi} + e^{-in\pi} \\ &= 2\Big(\frac{e^{in\pi} + e^{-in\pi}}{2}\Big) \\ &= 2\cos n\pi \end{aligned}$$

Ejemplo 5.24

D.q.

$$\left(\frac{1+i\tan\alpha}{1-\tan\alpha}\right)^n = \frac{1+i\tan(n\alpha)}{1-i\tan(n\alpha)}$$

Solución.

$$\begin{aligned}\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} &= \frac{1+i\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}{1-i\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha-i\operatorname{sen}\alpha}\\ &= \frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}\right)^n &= \left(\frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}}\right)^n = \frac{e^{in\alpha}}{e^{-in\alpha}} = \frac{\cos(n\alpha)+i\operatorname{sen}(n\alpha)}{\cos(n\alpha)-i\operatorname{sen}(n\alpha)}\\ &= \frac{1+i\tan(n\alpha)}{1-i\tan(n\alpha)}\end{aligned}$$

dividiendo numerador y denominado por $\cos(n\alpha)$.

Ejemplo 5.25

Demostrar que si $z \in \mathscr{C}$: $|z-1| = 1$ entonces

$$\arg(z-1) = 2\arg(z) = \frac{2}{3}\arg(z^2-z)$$

Solución.

Suponiendo que la forma polar de $z-1$ es

$$z-1 = re^{i\theta}$$

donde $|z-1| = r = 1$ y $\theta = \arg(z-1)$ entonces $z-1 = e^{i\theta}$

$$\begin{aligned}z &= 1+e^{i\theta}\\ &= 1+(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)\\ &= (1+\cos\theta)+i\operatorname{sen}\theta\\ &= 2\cos^2\frac{\theta}{2}+2i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

$$= 2\cos\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2} + i\ \text{sen}\,\frac{\theta}{2})$$
$$= 2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$$

luego $\arg(z) = \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\arg(z-1)$ entonces

$$2\arg(z) = \arg(z-1) \tag{5.8}$$

Por otro lado

$$z^2 - z = z(z-1)$$
$$\arg(z^2 - z) = \arg(z) + \arg(z-1) = \frac{\theta}{2} + \theta = \frac{3\theta}{2}$$
$$= \frac{3}{2}\arg(z-1) \tag{5.9}$$

De (5.8) y (5.9)

$$\arg(z-1) = 2\arg(z) = \frac{2}{3}\arg(z^2 - z)$$

Ejemplo 5.26

Si $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ entonces

$$\arg\left(\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}\right) = \frac{1}{2}\arg(\frac{z_2}{z_1})$$

Solución.

Si $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ entonces

$$|z_1|^2 = |z_2|^2 = |z_3|^2 \Longrightarrow z_1\bar{z}_1 = z_2\bar{z}_2 = z_3\bar{z}_3$$

$$z_3 = \frac{z_2\bar{z}_2}{\bar{z}_3}, \quad z_3 = \frac{z_1\bar{z}_1}{\bar{z}_3}$$

$$\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{\frac{z_2\bar{z}_2}{\bar{z}_3} - z_2}{\frac{z_1\bar{z}_1}{\bar{z}_3} - z_1} = \frac{z_2\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_3}{z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_3}$$
$$= \frac{z_2(\bar{z}_2 - \bar{z}_3)}{z_1(\bar{z}_1 - \bar{z}_3)} = \frac{z_2(\overline{z_2 - z_3})}{z_1(\overline{z_1 - z_3})}$$

$$= \frac{z_2}{z_1}\left(\overline{\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}}\right) = \frac{z_2}{z_1}\left(\overline{\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}}\right)$$

por lo tanto

$$\arg\left(\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}\right) = \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) + \arg\left(\overline{\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}}\right) \Longrightarrow 2\arg\left(\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}\right) = \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$$

5.10 Raíz n-ésima de un número complejo

Se desea encontrar las raíces n-ésimas (o raíces de orden n) de un número complejo.

Definición 5.22

Si z es un número complejo, la **raíz n-ésima** de z, es un número complejo w tal que $w^n = z$.

En efecto, si $z = re^{i\theta}$ y $w = \sigma e^{i\varphi}$ es la raíz n-ésima de z, entonces $w^n = z$

$$w^n = \sigma^n e^{in\varphi} = re^{i\theta} = z \Longleftrightarrow \begin{cases} \sigma^n = r \Longrightarrow \sigma = r^{1/n} \\ e^{in\varphi} = e^{i\theta} \Longrightarrow \dfrac{e^{in\varphi}}{e^{i\theta}} = 1 \Longrightarrow e^{i(n\varphi-\theta)} = 1 \end{cases}$$

entonces

$$\cos(n\varphi - \theta) + i\,\mathrm{sen}(n\varphi - \theta) = (1 + 0i) = 1$$

entonces

$$n\varphi - \theta = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

Reemplazando estos resultados

$$w = \sigma e^{i\varphi} = r^{1/n} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)},\ k \in \mathbb{Z}$$

Definición 5.23

Si $z = re^{i\theta}$ donde $r = |z|$ y $\theta = \arg(z)$, las **raíces** n**-ésimas** de z están dadas por:

$$w_k = r^{1/n} e^{i(\frac{\theta+2k\pi}{n})}, \text{ donde } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Nota

1) Es suficiente tomar $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ para obtener las n raíces distintas del número complejo z.

2) Las raíces n-ésimas de $z = re^{i\theta}$ se encuentran sobre una circunferencia de radio $r^{1/n}$ y centro en el origen O del plano complejo y se ubican igualmente espaciadas con una de ellas que tiene argumento igual a $\frac{\theta}{n}$.

Ejemplo 5.27

Encontrar las raíces de orden 5 de $z = \sqrt{3} + i$

Solución.

$r = |z| = 2$, $\theta = \arg(z) = \frac{\pi}{6}$ entonces $z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

$$w_k = (2)^{1/5} e^{i(\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{5})}, \; k = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$\text{Si } k = 0 \Longrightarrow w_0 = 2^{1/5} e^{i(\frac{\pi}{30})}$$

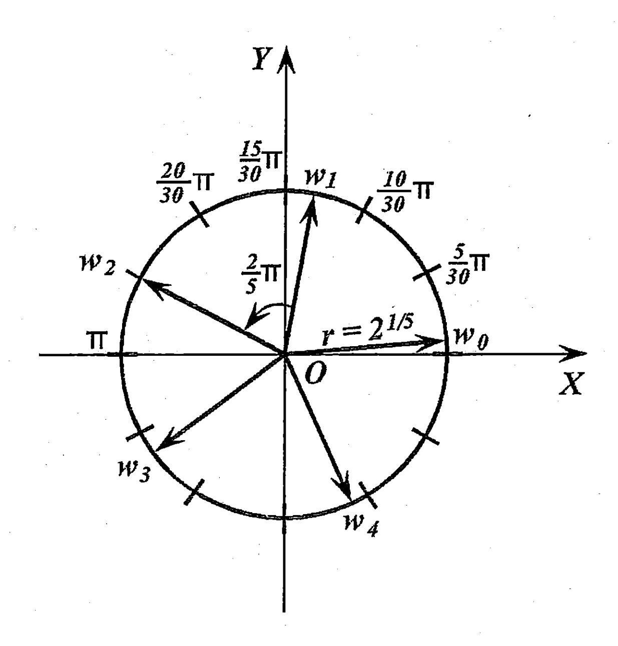
$$\text{Si } k = 1 \Longrightarrow w_1 = 2^{1/5} e^{i(\frac{13\pi}{30})}$$

$$\text{Si } k = 2 \Longrightarrow w_2 = 2^{1/5} e^{i(\frac{25\pi}{30})}$$

$$\text{Si } k = 3 \Longrightarrow w_3 = 2^{1/5} e^{i(\frac{37\pi}{30})}$$

$$\text{Si } k = 4 \Longrightarrow w_4 = 2^{1/5} e^{i(\frac{49\pi}{30})}$$

Gráficamente



Ejemplo 5.28

Si $z = -i$, calcular las raíces de orden 3.

Solución.

$$r = |z| = 1, \quad \theta = \arg(z) = \frac{3\pi}{2} \Longrightarrow z = e^{i\,\frac{3\pi}{2}}$$

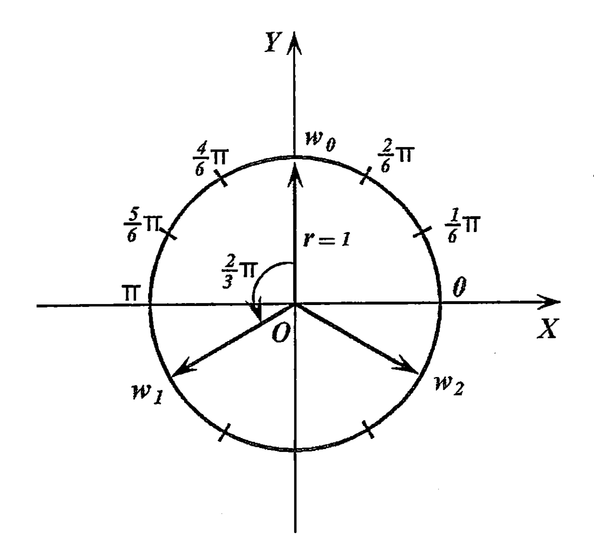
$$w_k = e^{i\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right)}, \; k = 0, 1, 2$$

$$\text{Si } k = 0 \Longrightarrow w_0 = e^{i\left(\frac{3\pi}{6}\right)}$$

$$\text{Si } k = 1 \Longrightarrow w_1 = e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)}$$

$$\text{Si } k = 2 \Longrightarrow w_2 = e^{i\left(\frac{11\pi}{6}\right)}$$

Gráficamente



Ejemplo 5.29

Si $z = 1$, calcular las raíces de orden 7.

Solución.

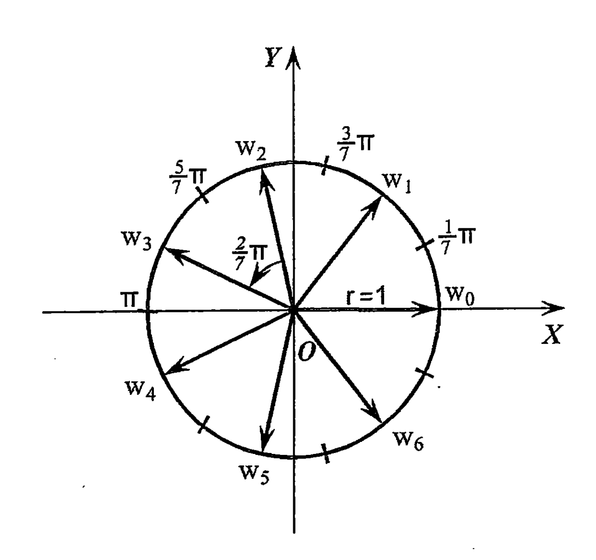
$$r = |z| = 1, \quad \theta = \arg(z) = 0 \Longrightarrow z = e^{i0}$$

$$w_k = e^{i(\frac{2k\pi}{7})}, \ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$w_0 = e^{i0} = 1$, $w_1 = e^{i\frac{2\pi}{7}}$, $w_2 = e^{i\frac{4\pi}{7}}$, $w_3 = e^{i\frac{6\pi}{7}}$

$w_4 = e^{i\frac{8\pi}{7}}$, $w_5 = e^{i\frac{10\pi}{7}}$, $w_6 = e^{i\frac{12\pi}{7}}$

Gráficamente



Nota

Las raíces n-ésimas de la unidad permiten construir un polígono regular de n lados.

Ejemplo 5.30

Si $z^4 = \bar{z}$. Calcular $z = a + ib$

Solución.

$$z^4 = \bar{z} \Longrightarrow z^4 z = \bar{z} z$$
$$z^5 = |z|^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow z = (a^2 + b^2)^{1/5}$$

Se reduce el problema a encontrar las raíces de orden 5 del número real $a^2 + b^2$

$$a^2 + b^2 = (a^2 + b^2)e^{i0} \text{ donde } |a^2 + b^2| = a^2 + b^2, \ \arg(a^2 + b^2) = 0$$

$$w_k = (a^2 + b^2)^{1/5} e^{i(\frac{2k\pi}{5})}, \ k = 0, 1, 2, 3, 4$$

Ejemplo 5.31

Si $z^6 - 2iz^3 - 1 = 0$. Calcular z.

Solución.

$$(z^3 - i)^2 = 0 \Longrightarrow z^3 - i = 0 \Longrightarrow z^3 = i \Longrightarrow z = i^{1/3}$$

el problema se reduce a encontrar las raíces de orden 3 de i

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}} \Longrightarrow w_k = e^{i(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3})}, \ k = 0, 1, 2$$
$$w_0 = e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad w_1 = e^{i\frac{5\pi}{6}}, \quad w_2 = e^{i\frac{9\pi}{6}}$$

Ejemplo 5.32

Si $(z^2 + 4)^4 = -(z - 2i)^8$. Calcular z.

Solución.

$$
\begin{aligned}
z^2+4 &= (z-2i)(z+2i)\\
(z^2+4)^4 &= (z-2i)^4(z+2i)^4 = -(z-2i)^8\\
(z+2i)^4 &= -(z-2i)^4\\
(\frac{z+2i}{z-2i})^4 &= -1
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\frac{z+2i}{z-2i} = (-1)^4 \qquad (5.10)
$$

el problema se reduce a encontrar las raíces de orden 4 de (-1)

$$
-1 = e^{i\pi} \text{ y } w_k = e^{i(\frac{\pi+2k\pi}{4})},\ k = 0,1,2,3
$$

y podemos afirmar que

$$
\frac{z_k+2i}{z_k-2i} = w_k \text{ para } k = 0,1,2,3.
$$

despejando z_k

$$
\begin{aligned}
z_k+2i &= w_k(z_k-2i)\\
z_k(1-w_k) &= -2i(1+w_k)\\
z_k &= -2i(\frac{1+w_k}{1-w_k}),\ k = 0,1,2,3
\end{aligned}
$$

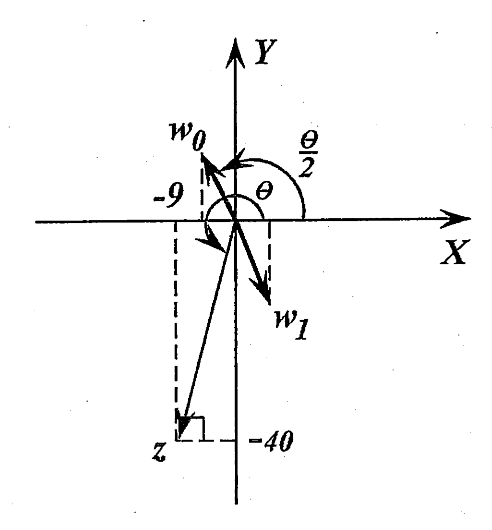
Nota

En los ejemplos anteriores observamos que los argumentos corresponden a ángulos notables, por ello lo sencillo de su manejo. Sin embargo, el problema de encontrar las raíces cuadradas de cualquier número complejo es factible calcular usando las propiedades trigonométricas del ángulo doble.

Ejemplo 5.33

Si $z = -9-40i$. Calcular las raíces de orden 2 de z.

Solución.



$$r = |z| = \sqrt{(-9)^2 + (-40)^2} = 41$$

$$w_k = \sqrt{41}e^{i(\frac{\theta+2k\pi}{2})},\ k = 0, 1$$
$$w_0 = \sqrt{41}e^{i\frac{\theta}{2}} = \sqrt{41}(\cos\frac{\theta}{2} + i\ \text{sen}\ \frac{\theta}{2})$$
$$w_1 = \sqrt{41}e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)} = \sqrt{41}(\cos(\frac{\theta}{2} + \pi) + i\ \text{sen}(\frac{\theta}{2} + \pi))$$

$\cos\theta = -\frac{9}{41}$ entonces

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{9}{41}}{2}} = -\sqrt{\frac{32}{82}} = -\frac{4}{\sqrt{41}}$$
$$\text{sen}\ \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{9}{41}}{2}} = \sqrt{\frac{50}{82}} = \frac{5}{\sqrt{41}}$$

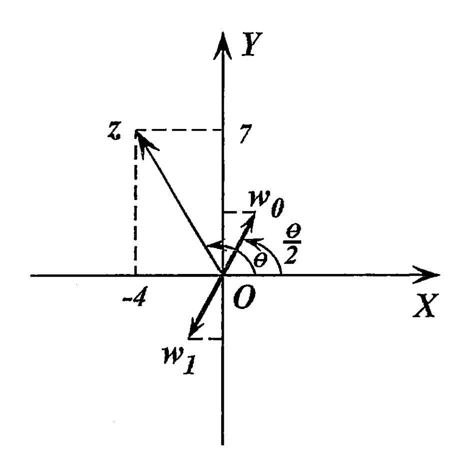
entonces

$$w_0 = \sqrt{41}(\cos\frac{\theta}{2} + i\ \text{sen}\ \frac{\theta}{2}) = \sqrt{41}(-\frac{4}{\sqrt{41}} + i\frac{5}{\sqrt{41}}) = -4 + 5i$$
$$w_1 = \sqrt{41}(-\cos\frac{\theta}{2} - i\ \text{sen}\ \frac{\theta}{2}) = \sqrt{41}(\frac{4}{\sqrt{41}} - i\frac{5}{\sqrt{41}}) = 4 - 5i$$

Ejemplo 5.34

Calcular las raíces cuadradas de $z = -4 + 7i$

Solución.



$$r = |z| = \sqrt{(-4)^2 + (7)^2} = \sqrt{65}$$

$$w_k = (\sqrt{65})^{1/2} e^{i(\frac{\theta + 2k\pi}{2})},\ k = 0, 1$$

$$w_0 = (65)^{1/4} e^{i\frac{\theta}{2}} = (65)^{1/4}(\cos\frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\theta}{2})$$

$$w_1 = (65)^{1/4} e^{i(\frac{\theta}{2} + \pi)} = (65)^{1/4}(\cos(\frac{\theta}{2} + \pi) + i \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2} + \pi))$$

$\cos\theta = -\frac{4}{\sqrt{65}}$ entonces

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{\sqrt{65}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{65} - 4}{2\sqrt{65}}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{\sqrt{65}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{65} + 4}{2\sqrt{65}}}$$

entonces

$$w_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{65} - 4}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{65} + 4}{2}}$$

$$w_1 = -\sqrt{\frac{\sqrt{65} - 4}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{65} + 4}{2}}$$

5.11 Ejercicios resueltos

Ejercicio 5.3

D.q.

$$\left|\frac{\text{Re}\,(z) + \text{Img}\,(z)}{\sqrt{2}}\right| \leq |z| \leq |\text{Re}\,(z)| + |\text{Img}\,(z)|$$

Solución.
Demostraremos que

$$|z| \leq |\text{Re}\,(z)| + |\text{Img}\,(z)|$$

Sea $z = a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.
Sabemos que $|ab| \geq 0$

$$\begin{aligned} 2|ab| &\geq 0 \\ a^2 + b^2 + 2|ab| &\geq a^2 + b^2 \\ |a|^2 + |b|^2 + 2|ab| &\geq a^2 + b^2 \\ (|a| + |b|)^2 &\geq a^2 + b^2 \\ \sqrt{a^2 + b^2} &\leq |a| + |b| \end{aligned}$$

pero $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, luego

$$|z| \leq |\text{Re}\,(z)| + |\text{Img}\,(z)| \tag{5.11}$$

Ahora demostraremos que

$$\left|\frac{\text{Re}\,(z) + \text{Img}\,(z)}{\sqrt{2}}\right| \leq |z|$$

Sabemos que $(a - b)^2 \geq 0$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2ab &\geq 0 \\ a^2 + b^2 &\geq 2ab \\ 2(a^2 + b^2) &\geq 2ab + (a^2 + b^2) \\ (a^2 + b^2) &\geq \left(\frac{a + b}{\sqrt{2}}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\sqrt{a^2+b^2} \geq \left|\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right|$$

entonces

$$\left|\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right| \leq \sqrt{a^2+b^2}$$

luego

$$\left|\frac{\text{Re}\,(z)+\text{Img}\,(z)}{\sqrt{2}}\right| \leq |z| \tag{5.12}$$

De (5.11) y (5.12) queda demostrada la desigualdad.

Ejercicio 5.4

Dado que $z = (5-i)^4(1+i)$. Probar que

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

Solución.
Calculamos

$$z = (5-i)^4(1+i) = 956-4i$$
$$z = 4(239-i) \tag{5.13}$$

Por otro lado, calculamos z usando la forma polar

$$z_1 = (5-i) \Longrightarrow r_1 = |z_1| = \sqrt{26},\ \tan\theta_1 = -\frac{1}{5}$$
$$z_1 = r_1e^{i\theta_1} = \sqrt{26}e^{i\arctan(-\frac{1}{5})}$$
$$z_1^4 = (5-i)^4 = (\sqrt{26})^4e^{-i4\arctan\frac{1}{5}}$$

$$z_2 = (1+i) \Longrightarrow r = |z_2| = \sqrt{2},\ \tan\theta_2 = \frac{\pi}{4}$$
$$z_2 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

$$z = z_1z_2 = (26)^2\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}-4\arctan\frac{1}{5})} \tag{5.14}$$

Expresamos (5.13) en la forma polar

$z = 4(239 - i)$ entonces

$$r = |z| = |4|\sqrt{(239)^2 + (-1)^2} = 4\sqrt{57122}$$
$$\tan\theta = -\frac{1}{239}$$

entonces

$$z = re^{i\theta} = 4\sqrt{57122}e^{-i(\arctan\frac{1}{239})} \tag{5.15}$$

Comparando los argumentos de (5.14) y (5.15)

$$\frac{\pi}{4} - 4\arctan\frac{1}{5} = -\arctan\frac{1}{239}$$
$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

Ejercicio 5.5

Hallar todos los z tales que Img $(z + \frac{1}{z}) = 0$

Solución.
Sea $z = a + bi \neq 0$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{(a - bi)}{a^2 + b^2}$$
$$z + \frac{1}{z} = a + bi + \frac{(a - bi)}{a^2 + b^2} = \frac{(a + bi)(a^2 + b^2) + (a - bi)}{a^2 + b^2}$$
$$= \frac{a(a^2 + b^2 + 1) + ib(a^2 + b^2 - 1)}{a^2 + b^2}$$
$$\text{Img } (z + \frac{1}{z}) = \frac{b(a^2 + b^2 - 1)}{a^2 + b^2} = 0 \Longrightarrow b = 0 \text{ ó } a^2 + b^2 - 1 = 0$$

es decir $z = a$ ó z tal que $a^2 + b^2 = 1$.
Se puede concluir que

$$\text{Img } (z + \frac{1}{z}) = 0$$

siempre y cuando z está sobre el eje X ó z pertenece a la circunferencia con centro en $(0, 0)$ y radio 1.

Ejercicio 5.6

Si z_1, z_2, z_3 son números complejos tales que $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ y $\arg(z_3) > \arg(z_2) > \arg(z_1) = \frac{\pi}{6}$. Hallar los argumentos de z_2 y z_3

Solución.

$$z_1 = \cos\beta + i\,\operatorname{sen}\beta = \cos\frac{\pi}{6} + i\,\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$
$$z_2 = \cos\theta + i\,\operatorname{sen}\theta$$
$$z_3 = \cos\alpha + i\,\operatorname{sen}\alpha$$

donde $\alpha > \theta > \beta = \frac{\pi}{6}$

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0$$
$$z_3 + z_2 = -z_1$$
$$z_3 + z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$
$$(\cos\alpha + \cos\theta) + i(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\theta) = (-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)$$

$$\cos\alpha + \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow 2\cos(\frac{\alpha+\theta}{2})\cos(\frac{\alpha-\theta}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2} \Longrightarrow 2\operatorname{sen}(\frac{\alpha+\theta}{2})\cos(\frac{\alpha-\theta}{2}) = -\frac{1}{2}$$

dividiendo miembro a miembro

$$\cot(\frac{\alpha+\theta}{2}) = \sqrt{3}$$
$$\tan(\frac{\alpha+\theta}{2}) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\frac{\alpha+\theta}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

Si $\alpha > \theta > \frac{\pi}{6}$ entonces $\alpha + \theta > \frac{\pi}{3}$
$k = 1$ entonces

$$\frac{\alpha+\theta}{2} = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$$

$$\operatorname{sen}(\frac{\alpha+\theta}{2}) = \operatorname{sen}(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$$

pero $2\operatorname{sen}(\frac{\alpha+\theta}{2})\cos(\frac{\alpha-\theta}{2}) = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} 2(-\frac{1}{2})\cos(\frac{\alpha-\theta}{2}) &= -\frac{1}{2} \\ \cos(\frac{\alpha-\theta}{2}) &= \frac{1}{2} \\ \frac{\alpha-\theta}{2} &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha-\theta &= \frac{2\pi}{3} \\ \alpha+\theta &= \frac{7\pi}{3} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow 2\alpha = \frac{9\pi}{3}$$

entonces

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{3\pi}{2} \\ \theta &= \frac{7\pi}{3} - \alpha = \frac{5\pi}{6} \end{aligned}$$

Ejercicio 5.7

Si z y w son dos números complejos tales que Re $(z) > 0$ y Re $(w) > 0$. D.q. $\left|\frac{z-w}{\bar{z}+w}\right| < 1$

Solución.

$\left|\frac{w-z}{w+\bar{z}}\right| < 1$ entonces

$$\begin{aligned} |w-z|^2 - |w+\bar{z}|^2 &= (w-z)(\overline{w-z}) - (w+\bar{z})(\overline{w+\bar{z}}) \\ &= (w-z)(\bar{w}-\bar{z}) - (w+\bar{z})(\bar{w}+z) \\ &= |w|^2 - w\bar{z} - z\bar{w} + |z|^2 - (|w|^2 + wz + \bar{z}\bar{w} + |z|^2) \\ &= -w\bar{z} - z\bar{w} - wz - \bar{z}\bar{w} \\ &= -(w\bar{z} + wz) - (z\bar{w} + \bar{z}\bar{w}) \\ &= -w(z+\bar{z}) - \bar{w}(z+\bar{z}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -(w + \bar{w})(z + \bar{z}) \\
&= -(2\text{Re}\,(w))(2\text{Re}\,(z)) \\
&= -4\text{Re}\,(w)\text{Re}\,(z) < 0
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
|w - z|^2 - |w + \bar{z}|^2 < 0 \\
|w - z|^2 < |w + \bar{z}|^2 \\
\frac{|w - z|}{|w + \bar{z}|} < 1
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$
\left|\frac{z - w}{\bar{z} + w}\right| < 1
$$

Ejercicio 5.8

Si $1, r, r^2$ son las raíces cúbicas de la unidad

1) D.q. $(1 + r^2)^4 = r$

2) Calcular $P = (1 - r)(1 - r^2)(1 - r^4)(1 - r^5)$

Solución.

$$
z = 1 = e^{i0}, \qquad |z| = 1, \qquad \arg(z) = 0
$$

$$
\begin{aligned}
w_k &= e^{i(\frac{2k\pi}{3})},\ k = 0, 1, 2 \\
1 = w_0 &= e^{i0} = 1 \\
r = w_1 &= e^{i(\frac{2\pi}{3})} = e^{i(\pi - \frac{\pi}{3})} = (-\cos\frac{\pi}{3}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \\
r^2 = w_2 &= e^{i(\frac{4\pi}{3})} = e^{i(\pi + \frac{\pi}{3})} = (-\cos\frac{\pi}{3}, -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}) = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})
\end{aligned}
$$

1) Comprobando

$$
r^2 = rr = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = (\frac{1}{4} - \frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4})
$$

$$= (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$1 + r^2 = (1,0) + (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$(1 + r^2)^2 = (1 + r^2)(1 + r^2) = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$= (\frac{1}{4} - \frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}) = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$(1 + r^2)^4 = (1 + r^2)^2(1 + r^2)^2 = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$= (\frac{1}{4} - \frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = r$$

2)

$$1 - r = (1,0) - (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = (\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$1 - r^2 = (1,0) - (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) = (\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$1 - r^4 = (1 - r^2)(1 + r^2) = (\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$= (\frac{3}{4} + \frac{3}{4}, \frac{-3\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}) = (\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$r^2 = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$r^4 = r^2 r^2 = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$= (\frac{1}{4} - \frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = r$$

$$r^5 = r^4 r = rr = r^2 = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$1 - r^5 = (1,0) - (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) = (\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$P = (1 - r)(1 - r^2)(1 - r^4)(1 - r^5)$$

$$= (\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$$
$$= (3,0)(3,0) = (9,0) = 9$$

Ejercicio 5.9

Hallar el valor de la expresión $w = z^{142} + \frac{1}{z^{142}}$ si se sabe que z es la raíz de la ecuación $z^2 - z + 1 = 0$.

Solución.
En efecto,

$$z^2 - z + 1 = 0$$
$$(z - \frac{1}{2})^2 = -1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$$

entonces

$$z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2} \Longrightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{3}$$
$$z = \cos(\pm\frac{\pi}{3}) + i\ \text{sen}(\pm\frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} + i\ \text{sen}(\pm\frac{\pi}{3})$$

Si $z = \cos\frac{\pi}{3} + i\ \text{sen}\,\frac{\pi}{3} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$\begin{aligned} z^{142} + \frac{1}{z^{142}} &= e^{i142(\frac{\pi}{3})} + \frac{1}{e^{i142(\frac{\pi}{3})}} \\ &= e^{i142(\frac{\pi}{3})} + e^{-i142(\frac{\pi}{3})} \\ &= 2\cos 142(\frac{\pi}{3}) = 2\cos(46\pi + \frac{4\pi}{3}) \\ &= 2\cos(\frac{4\pi}{3}) = 2\cos(\pi + \frac{\pi}{3}) \\ &= -2\cos\frac{\pi}{3} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Si $z = \cos\frac{\pi}{3} - i\ \text{sen}\,\frac{\pi}{3} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$$z^{142} + \frac{1}{z^{142}} = e^{-i142(\frac{\pi}{3})} + \frac{1}{e^{-i142(\frac{\pi}{3})}}$$

$$= e^{-i142(\frac{\pi}{3})} + e^{i142(\frac{\pi}{3})}$$
$$= 2\cos\frac{142\pi}{3}$$
$$= -1$$

(Se obtiene el mismo resultado)

Ejercicio 5.10

1) Determinar un número complejo z de modo que z, $\frac{1}{z}$ y $1 - z$ tengan el mismo módulo.

2) Representar en forma polar el número complejo $z = 1 + \operatorname{sen}\alpha + i\cos\alpha$ si $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$.

Solución.
En efecto.

1) $|z| = |\frac{1}{z}| = |1 - z|$

Sea

$$z = a + bi$$
$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{(a - bi)}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{bi}{a^2 + b^2}$$
$$1 - z = 1 - (a + bi) = (1 - a) - bi$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\frac{a}{a^2 + b^2})^2 + (\frac{-b}{a^2 + b^2})^2} = \sqrt{(1 - a)^2 + (-b)^2}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\frac{a}{a^2 + b^2})^2 + (\frac{-b}{a^2 + b^2})^2} \tag{5.16}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(1 - a)^2 + b^2} \tag{5.17}$$

$$a^2 + b^2 = (1 - a)^2 + b^2$$

$$a^2 = 1 - 2a + a^2$$
$$a = \frac{1}{2}$$

De (5.16) $a^2 + b^2 = 1,\ b^2 = 1 - a^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Longrightarrow b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$z = a + bi = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2)

$$z = 1 + \operatorname{sen}\alpha + i\cos\alpha \qquad \frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$$
$$z = (1 + \operatorname{sen}\alpha) + i(0 + \cos\alpha)$$
$$= (\operatorname{sen} 90 + \operatorname{sen}\alpha) + i(\cos 90 + \cos\alpha)$$
$$= 2\operatorname{sen}(\frac{90+\alpha}{2})\cos(\frac{90-\alpha}{2}) + 2i\cos(\frac{90+\alpha}{2})\cos(\frac{90-\alpha}{2})$$
$$= 2\cos(\frac{90-\alpha}{2})(\operatorname{sen}(\frac{90+\alpha}{2}) + i\cos(\frac{90+\alpha}{2})) \qquad (5.18)$$

Sabemos que $\operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos x$, $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen} x$

En (5.18)

$$z = 2\cos(\frac{90-\alpha}{2})(\cos(\frac{90+\alpha}{2} - \frac{\pi}{2}) - i\operatorname{sen}(\frac{90+\alpha}{2} - \frac{\pi}{2}))$$
$$z = 2\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})(\cos(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}) - i\operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}))$$
$$z = 2\cos(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4})e^{-i(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4})}, \quad 0 \leq \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$$

Ejercicio 5.11

D.q.

$$\frac{1 + \cos a + i\operatorname{sen} a}{1 + \cos b + i\operatorname{sen} b} = \frac{\cos\frac{a}{2}}{\cos\frac{b}{2}}(\cos(\frac{a-b}{2}) + i\operatorname{sen}(\frac{a-b}{2}))$$

Solución.
En efecto,

$$\begin{aligned}
\frac{1+\cos a + i\,\text{sen}\,a}{1+\cos b + i\,\text{sen}\,b} &= \frac{2\cos^2\frac{a}{2} + i2\,\text{sen}\,\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}{2\cos^2\frac{b}{2} + i2\,\text{sen}\,\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2}}\\
&= \frac{2\cos\frac{a}{2}(\cos\frac{a}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{a}{2})}{2\cos\frac{b}{2}(\cos\frac{b}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{b}{2})}\\
&= \frac{\cos\frac{a}{2}e^{i\frac{a}{2}}}{\cos\frac{b}{2}e^{i\frac{b}{2}}}\\
&= \frac{\cos\frac{a}{2}}{\cos\frac{b}{2}}e^{i(\frac{a}{2}-\frac{b}{2})}\\
&= \frac{\cos\frac{a}{2}}{\cos\frac{b}{2}}(\cos(\frac{a-b}{2}) + i\,\text{sen}(\frac{a-b}{2}))
\end{aligned}$$

Ejercicio 5.12

Si w es una raíz cúbica compleja de la unidad, calcular

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & w & w^2 & w^3 \\ w & w^2 & w^3 & 1 \\ w^2 & w^3 & 1 & w \\ w^3 & 1 & w & w^2 \end{vmatrix}$$

Solución.
Si w es una raíz cúbica de $z = 1$ entonces

$$w^3 = 1$$

$$w^3 - 1 = 0$$

$$(w-1)(w^2+w+1) = 0$$

$$\begin{cases} w - 1 = 0 \Longrightarrow w = 1 \\ w^2 + w + 1 = 0 \Longrightarrow w^2 = -w - 1 \end{cases}$$

$$|A| \xrightarrow[\text{factor común } c_1]{c_1+\sum_{i=2}^{4} c_i} (1+w+w^2+w^3)\begin{vmatrix} 1 & w & w^2 & w^3 \\ 1 & w^2 & w^3 & 1 \\ 1 & w^3 & 1 & w \\ 1 & 1 & w & w^2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_4-f_1]{f_2-f_1, f_3-f_1} (1+w+w^2+w^3)\begin{vmatrix} 1 & w & w^2 & w^3 \\ 0 & w^2-w & w^3-w^2 & 1-w^3 \\ 0 & w^3-w & 1-w^2 & w-w^3 \\ 0 & 1-w & w-w^2 & w^2-w^3 \end{vmatrix}$$

$$= (1+w+w^2+w^3)(1-w)^3\begin{vmatrix} -w & -w^2 & 1+w+w^2 \\ -w-w^2 & 1+w & w+w^2 \\ 1 & w & w^2 \end{vmatrix} = 0$$

Ejercicio 5.13

w_m y w_{m+1} son raíces consecutivas de z tal que entre el arco determinado por w_m y w_{m+1} no existe raíz alguna de z. Si $w_m + w_{m+1} = 2$, $\arg(w_m) = \frac{\pi}{4}$. Determinar z

Solución.

Sea $z = re^{i\theta}$, donde $r = |z|$ y $\theta = \arg(z)$

$$w_k = r^{1/n}e^{i(\frac{\theta+2k\pi}{n})}, \; k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

$$w_m = r^{1/n}(\cos\theta_m + i \operatorname{sen}\theta_m) \text{ tal que } w_m^n = z, \; \theta_m = \frac{\pi}{4} \tag{5.19}$$

$$w_{m+1} = r^{1/n}(\cos\theta_{m+1} + i \operatorname{sen}\theta_{m+1}) \text{ tal que } w_{m+1}^n = z \tag{5.20}$$

Sumando miembro a miembro (5.19) y (5.20)

$$w_m + w_{m+1} = r^{1/n}[(\cos\theta_m + \cos\theta_{m+1}) + i(\operatorname{sen}\theta_m + \operatorname{sen}\theta_{m+1}) = 2$$

1)

$$\operatorname{sen}\theta_m + \operatorname{sen}\theta_{m+1} = 0$$

$$\operatorname{sen}\theta_{m+1} = -\operatorname{sen}\theta_m = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

entonces

$$\operatorname{sen}\theta_{m+1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \begin{cases} \theta_{m+1} = -\frac{\pi}{4} \\ \theta_{m+1} = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

2) $r^{1/n}(\cos\theta_m + \cos\theta_{m+1}) = 2$ entonces

$$\cos\theta_m + \cos\theta_{m+1} = \frac{2}{r^{1/n}}$$

$$\cos\theta_{m+1} = \frac{2}{r^{1/n}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{5.21}$$

Si $\theta_{m+1} = \frac{5\pi}{4}$ entonces $\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
En (5.21)

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{r^{1/n}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \frac{2}{r^{1/n}} = 0$$

(no existe valor para r)
Si $\theta_{m+1} = -\frac{\pi}{4}$ entonces $\cos(-\frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
En (5.21)

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{r^{1/n}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow r^{1/n} = \sqrt{2}$$

Luego

$$w_m = \sqrt{2}(\cos\frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n})$$

$$\Longrightarrow \frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n} = \frac{\pi}{4}$$

$$w_{m+1} = \sqrt{2}(\cos\frac{\theta + 2(n-2)\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\theta + 2(n-2)\pi}{n})$$

$$\Longrightarrow \frac{\theta + 2(n-2)\pi}{n} = -\frac{\pi}{4}$$

restando miembro a miembro

$$\frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n} - \frac{\theta + 2(n-2)\pi}{n} = \frac{\pi}{2}$$

entonces $n = 4$.

Por tanto

$$z = w_m^4 \text{ y } w_m = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z = w_m^4 = (\sqrt{2})^4 e^{i\pi} = 4(-1, 0) \Longrightarrow z = -4$$

Ejercicio 5.14

Hallar $|z|, \arg(z), \text{Img}\,(z)$ si $(z+i)^n = (iz+1)^n$, n es múltiplo de 4.

Solución.

$$iz + 1 = iz - i^2 = i(z-i)$$
$$(z+i)^n = i^n(z-i)^n$$

si n es múltiplo de 4, entonces $i^n = 1$.
Luego

$$(z+i)^n = (z-i)^n$$
$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1, \text{ si } z \neq i$$
$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right) = 1^{1/n}$$

Entonces $w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$

$$\frac{z_k + i}{z_k - i} = w_k \Longrightarrow z_k = i\frac{(w_k+1)}{w_k - 1}$$

Si $n = 4$ entonces

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{i(e^{i\frac{k\pi}{2}}+1)}{e^{i\frac{k\pi}{2}}-1} \\ &= \frac{ie^{i\frac{k\pi}{4}}(e^{i\frac{k\pi}{4}}+e^{-i\frac{k\pi}{4}})}{e^{i\frac{k\pi}{4}}(e^{i\frac{k\pi}{4}}-e^{-i\frac{k\pi}{4}})} = \frac{i(2\cos\frac{k\pi}{4})}{2i\,\text{sen}\,\frac{k\pi}{4}} \\ &= \cot\frac{k\pi}{4},\ k = 0, 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Si $n = 8$ entonces

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{i(e^{i\frac{k\pi}{4}}+1)}{e^{i\frac{k\pi}{4}}-1} = \frac{i(2\cos{}^{k\pi}/_{8})}{2i\,\text{sen}\,{}^{k\pi}/_{8}} \\ &= \cot\frac{k\pi}{8},\ k = 0, 1, 2, \ldots, 7 \end{aligned}$$

Si $n = 4p$ entonces

$$z_k = \frac{i(e^{i\frac{k\pi}{4p}} + 1)}{e^{i\frac{k\pi}{4p}} - 1} = \frac{i(2\cos\frac{k\pi}{2(4p)})}{2i\ \mathrm{sen}\,\frac{k\pi}{2(4p)}}$$
$$= \cot\frac{k\pi}{2(4p)},\ k = 0, 1, 2, \ldots, (4p-1)$$

$$|z_k| = |\cot\frac{k\pi}{2(4p)}|,\ k = 0, 1, 2, \ldots, (4p-1)$$
$$\arg(z_k) = 0, \quad \mathrm{Img}\,(z_k) = 0$$

Ejercicio 5.15

Si $z + \frac{1}{z} = 2\cos\frac{\pi}{9}$. Calcular $z^9 + \frac{1}{z^9}$

Solución.

$$z = a + bi,\ z + \frac{1}{z} = 2\cos\frac{\pi}{9} = t \Longrightarrow z^2 - zt + 1 = 0$$
$$z^2 = (a+bi)(a+bi) = (a^2 - b^2) + 2abi$$

$z^2 - zt + 1 = 0$ entonces

$$(a^2 - b^2) + 2abi - t(a+bi) + 1 = 0$$
$$\begin{cases} a^2 - b^2 - ta + 1 = 0 & \Longrightarrow b^2 = a^2 - ta + 1 \\ 2ab - tb = 0 \Longrightarrow t = 2a & \Longrightarrow a = \frac{t}{2} = \cos\frac{\pi}{9} \end{cases} \tag{5.22}$$

En (5.22)

$$b^2 = \frac{t^2}{4} - \frac{t^2}{2} + 1 = 1 - \frac{t^2}{4} = 1 - \frac{1}{4}(2\cos\frac{\pi}{9})^2 = 1 - \cos^2\frac{\pi}{9} = \mathrm{sen}^2\,\frac{\pi}{9}$$
$$b = \pm\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{9}$$

$z = a + bi = \cos\frac{\pi}{9} \pm i\ \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{9}$ entonces $z_1 = e^{i\frac{\pi}{9}}$, $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{9}}$
Si $z = e^{i\frac{\pi}{9}}$ entonces

$$z^9 + \frac{1}{z^9} = e^{i\pi} + e^{-i\pi} = 2\cos\pi = -2$$

Si $z = e^{-i\frac{\pi}{9}}$ entonces

$$z^9 + \frac{1}{z^9} = e^{-i\pi} + e^{i\pi} = 2\cos\pi = -2$$

Ejercicio 5.16

D.q. si z es un número complejo tal que $|z| = 1$ entonces $z = (\frac{1+ix}{1-ix})^n$ tiene todas las raíces reales y distintas.

Solución.

Sea $z = re^{i\theta}$ donde $r = |z| = 1$ entonces $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$

$$z^{1/n} = e^{i(\frac{\theta+2k\pi}{n})},\; k = 0, 1, \ldots, n-1$$

$$z^{1/n} = \cos(\frac{\theta + 2k\pi}{n}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\theta + 2k\pi}{n}),\; k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Despejando

$$z^{1/n} = \frac{1+ix}{1-ix}$$

$$z^{1/n}(1-ix) = 1+ix$$

$$-ix(z^{1/n}+1) = 1 - z^{1/n}$$

$$x = \Big(\frac{z^{1/n}-1}{z^{1/n}+1}\Big)\frac{1}{i}$$

$$\begin{aligned}\frac{z^{1/n}-1}{z^{1/n}+1} &= \frac{\cos(\frac{\theta+2k\pi}{n}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\theta+2k\pi}{n}) - 1}{\cos(\frac{\theta+2k\pi}{n}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\theta+2k\pi}{n}) + 1}\\ &= \frac{-2\,\mathrm{sen}^2(\frac{\theta+2k\pi}{2n}) + 2i\,\mathrm{sen}(\frac{\theta+2k\pi}{2n})\cos(\frac{\theta+2k\pi}{2n})}{2\cos^2(\frac{\theta+2k\pi}{2n}) + 2i\,\mathrm{sen}(\frac{\theta+2k\pi}{2n})\cos(\frac{\theta+2k\pi}{2n})}\\ &= \frac{2\,\mathrm{sen}(\frac{\theta+2k\pi}{2n})}{2\cos(\frac{\theta+2k\pi}{2n})}\left(\frac{-\,\mathrm{sen}(\frac{\theta+2k\pi}{2n}) + i\cos(\frac{\theta+2k\pi}{2n})}{\cos(\frac{\theta+2k\pi}{2n}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\theta+2k\pi}{2n})}\right)\end{aligned}$$

$$x = \tan(\frac{\theta+2k\pi}{2n})\left(\frac{-\,\mathrm{sen}(\frac{\theta+2k\pi}{2n}) + i\cos(\frac{\theta+2k\pi}{2n})}{i\cos(\frac{\theta+2k\pi}{2n}) - sen(\frac{\theta+2k\pi}{2n})}\right)$$

$$x = \tan(\frac{\theta + 2k\pi}{2n}),\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Luego para cada valor de k saldrá un valor distinto de x.

Ejercicio 5.17

Si Re $(z) > 0$ y $a > b > 0$ D.q. $1 < \frac{a+\text{Re}(z)}{b+\text{Re}(z)} < \frac{a}{b}$

Solución.
Si $z = (x, y)$ entonces Re $(z) = x > 0$
Debemos d.q. $1 < \frac{a+x}{b+x} < \frac{a}{b}$
Si $0 < b < a$ entonces

$$b + x < a + x,\ \forall x > 0$$
$$1 < \frac{a+x}{b+x} \tag{5.23}$$

Si $x > 0$ entonces

$$bx < ax$$
$$ab + bx < ab + ax, ab > 0$$
$$b(a+x) < a(b+x)$$
$$\frac{b(a+x)}{a(b+x)} < 1$$
$$\frac{b(a+x)}{a(b+x)}\frac{a}{b} < \frac{a}{b}$$
$$\frac{a+x}{b+x} < \frac{a}{b} \tag{5.24}$$

De (5.23) y (5.24)

$$1 < \frac{a+x}{b+x} < \frac{a}{b}$$

Ejercicio 5.18

Si $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} - \{0\}$, entonces $\frac{3}{|z_1|+|z_2|+|z_3|} \leq \frac{1}{3}(\frac{1}{|z_1|} + \frac{1}{|z_2|} + \frac{1}{|z_3|})$

Solución.

$$||z_1| - |z_2||^2 \geq 0$$
$$|z_1|^2 - 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \geq 0$$
$$|z_1|^2 + |z_2|^2 \geq 2|z_1||z_2|$$
$$\frac{|z_1|}{|z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1|} \geq 2$$

$$(\frac{1}{|z_1|} + \frac{1}{|z_2|} + \frac{1}{|z_3|})(|z_1| + |z_2| + |z_3|)$$
$$\frac{|z_1|}{|z_1|} + \frac{|z_1|}{|z_2|} + \frac{|z_1|}{|z_3|} + \frac{|z_2|}{|z_1|} + \frac{|z_2|}{|z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_3|} + \frac{|z_3|}{|z_1|} + \frac{|z_3|}{|z_2|} + \frac{|z_3|}{|z_3|} =$$
$$3 + (\frac{|z_1|}{|z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1|}) + (\frac{|z_1|}{|z_3|} + \frac{|z_3|}{|z_1|}) + (\frac{|z_2|}{|z_3|} + \frac{|z_3|}{|z_2|}) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$$

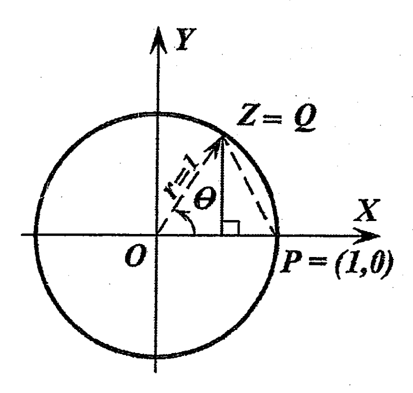
$$(\frac{1}{|z_1|} + \frac{1}{|z_2|} + \frac{1}{|z_3|})(|z_1| + |z_2| + |z_3|) \geq 9$$
$$\frac{3}{|z_1| + |z_2| + |z_3|} \leq \frac{1}{3}(\frac{1}{|z_1|} + \frac{1}{|z_2|} + \frac{1}{|z_3|})$$

Ejercicio 5.19

Sea $|re^{i\theta}| \neq 0$ donde $\theta \in I$ cuadrante D.q.

$$|re^{i\theta} - 1| \leq ||re^{i\theta}| - 1| + |re^{i\theta}||\theta|$$

Solución.



Sea $z = re^{i\theta}$.

En una circunferencia $\mathscr{C}$ con centro en el origen y radio $r = 1$

$$z = re^{i\theta} = e^{i\theta} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$$
$$|z| = |re^{i\theta}| = 1$$

$$\left|\frac{re^{i\theta}}{|re^{i\theta}|} - 1\right| = |re^{i\theta} - 1| = |\cos\theta - 1, \operatorname{sen}\theta|$$
$$= \sqrt{(\cos\theta - 1)^2 + \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{2 - 2\cos\theta}$$
$$= d(P, Q) \leq \theta \leq |\theta|$$

Por tanto

$$\left|\frac{re^{i\theta}}{|re^{i\theta}|} - 1\right| \leq |\theta|$$
$$|re^{i\theta} - |re^{i\theta}|| \leq |re^{i\theta}||\theta|$$
$$|re^{i\theta} - 1 + 1 - |re^{i\theta}|| \leq |re^{i\theta}||\theta| \tag{5.25}$$

Aplicando la propiedad $||a| - |b|| \leq |a - b|$

$$|(re^{i\theta} - 1) - (|re^{i\theta}| - 1)| \geq ||re^{i\theta} - 1| - ||re^{i\theta}| - 1|$$
$$|re^{i\theta} - 1| - ||re^{i\theta}| - 1| \leq |(re^{i\theta} - 1) - (|re^{i\theta}| - 1)| \leq |re^{i\theta}||\theta|$$

Luego

$$|re^{i\theta} - 1| \leq ||re^{i\theta}| - 1| + |re^{i\theta}||\theta|$$

Ejercicio 5.20

Si $w \neq 1$ es la primera raíz de $z^9 - 1 = 0$.

1) Calcular $\sum\limits_{k=1}^{4} (w^k + w^{-k} + 2)^2$

2) Calcular $\sum\limits_{k=1}^{4} \cos^4(\frac{k\pi}{9})$

Solución.

1) $z^9 - 1 = 0$ entonces

$$\begin{aligned} z &= 1^{1/9} \qquad (1 = e^{i0}) \\ w_k &= e^{i\frac{2k\pi}{9}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 0 &\Longrightarrow w_0 = e^{i0} = 1 \quad \text{(no cumple la condición } w \neq 1\text{)} \\ k = 1 &\Longrightarrow w_1 = e^{i\frac{2\pi}{9}} \neq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w^9 - 1 = (w-1)(1 + w + w^2 + \cdots + w^8) &= 0 \\ 1 + w + w^2 + \cdots + w^8 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (w^k + w^{-k} + 2)^2 &= w^{2k} + w^{-2k} + 4 + 2w^k w^{-k} + 4w^k + 4w^{-k} \\ &= w^{2k} + w^{-2k} + 4(w^k + w^{-k}) + 6 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{4} (w^k + w^{-k} + 2)^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{4}(w^{2k} + w^{-2k} + 4(w^k + w^{-k}) + 6)\\
&= w^2 + w^{-2} + 4(w + w^{-1}) + 6 + w^4 + w^{-4} + 4(w^2 + w^{-2}) + 6\\
&\quad + w^6 + w^{-6} + 4(w^3 + w^{-3}) + 6 + w^8 + w^{-8} + 4(w^4 + w^{-4}) + 6\\
&= (w^2 + w^4 + w^6 + w^8 + w^{-2} + w^{-4} + w^{-6} + w^{-8}) +\\
&\quad 4(w + w^2 + w^3 + w^4 + w^{-1} + w^{-2} + w^{-3} + w^{-4}) + 24\\
&= \frac{1}{w^8}(w^{10} + w^{12} + w^{14} + w^{16} + w^6 + w^4 + w^2 + 1)\\
&\quad \frac{4}{w^4}(w^5 + w^6 + w^7 + w^8 + w^3 + w^2 + w + 1) + 24, \quad w^9 = 1\\
&= \frac{1}{w^8}(w + w^3 + w^5 + w^7 + w^6 + w^4 + w^2 + 1) + \frac{4}{w^4}(-w^4) + 24\\
&= \frac{1}{w^8}(-w^8) + \frac{4}{w^4}(-w^4) + 24\\
&= 19
\end{aligned}
$$

2) $\sum\limits_{k=1}^{4} \cos^4(\frac{k\pi}{9}) = ?$

$w = e^{i\frac{2\pi}{9}}$ entonces

$$w^k = e^{i\frac{2k\pi}{9}} = (e^{i\frac{k\pi}{9}})^2$$

si $e^{i\frac{k\pi}{9}} = \epsilon^k$

$$w^k = (\epsilon^k)^2$$

$$\left.\begin{aligned} \epsilon^k &= \cos\frac{k\pi}{9} + i\,\text{sen}\,\frac{k\pi}{9}\\ \epsilon^{-k} &= \cos\frac{k\pi}{9} - i\,\text{sen}\,\frac{k\pi}{9}\end{aligned}\right\} \epsilon^k + \epsilon^{-k} = 2\cos\frac{k\pi}{9}$$

$$(\epsilon^k + \epsilon^{-k})^4 = (2\cos\frac{k\pi}{9})^4 = 2^4\cos^4\frac{k\pi}{9} = 16\cos^4\frac{k\pi}{9} \qquad (5.26)$$

$$(\epsilon^k + \epsilon^{-k})^2 = \epsilon^{2k} + \epsilon^{-2k} + 2$$

$$(\epsilon^k + \epsilon^{-k})^4 = (\epsilon^{2k} + \epsilon^{-2k} + 2)^2 \tag{5.27}$$

De (5.26) y (5.27)

$$(\epsilon^{2k} + \epsilon^{-2k} + 2)^2 = 16\cos^4 \frac{k\pi}{9}$$

$$\frac{1}{16}(w^k + w^{-k} + 2)^2 = \cos^4 \frac{k\pi}{9}$$

$$\sum_{k=1}^{4} \cos^4 \frac{k\pi}{9} = \frac{1}{16}\sum_{k=1}^{4}(w^k + w^{-k} + 2)^2 = \frac{19}{16}$$

Ejercicio 5.21

1) $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tal que $|z_1| = |z_2|$ y

$$(z_1 + z_2)^n(\bar{z}_1^n + \bar{z}_2^n) = t(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)^n(z_1^n + z_2^n).$$

Hallar t

2) $E = |iz-1|^n(z^n - z) - |iz-1|^n(i\bar{z} + \bar{z}^n) - |\bar{z}-i|^n(z^n - z) + |\bar{z}-i|^n(i\bar{z} + \bar{z}^n)$ donde $z \in \mathbb{C}$. Hallar E.

Solución.
En efecto:

1) Operando

$$\begin{aligned}
(z_1 + z_2)^n\bar{z}_1^n + (z_1 + z_2)^n\bar{z}_2^n &= t[(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)^n z_1^n + (\bar{z}_1 + \bar{z}_2)^n z_2^n] \\
((z_1 + z_2)\bar{z}_1)^n + ((z_1 + z_2)\bar{z}_2)^n &= t[((\bar{z}_1 + \bar{z}_2)z_1)^n + ((\bar{z}_1 + \bar{z}_2)z_2)^n] \\
(z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_1)^n + (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_2)^n &= t[(\bar{z}_1 z_1 + \bar{z}_2 z_1)^n + (\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_2)^n] \\
(|z_1|^2 + z_2\bar{z}_1)^n + (z_1\bar{z}_2 + |z_2|^2)^n &= t[(|z_1|^2 + \bar{z}_2 z_1)^n + (\bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2)^n]
\end{aligned}$$

Entonces $t = 1$

2)

$$E = |iz - 1|^n(z^n - z) - |iz - 1|^n(i\bar{z} + \bar{z}^n)$$

$$
\begin{aligned}
&- |\bar{z} - i|^n(z^n - z) + |\bar{z} - i|^n(i\bar{z} + \bar{z}^n) \\
&= |iz - 1|^n(z^n - z - i\bar{z} - \bar{z}^n) - |\bar{z} - i|^n(z^n - z - i\bar{z} - \bar{z}^n) \\
&= (|iz - 1|^n - |\bar{z} - i|^n)(z^n - z - i\bar{z} - \bar{z}^n)
\end{aligned}
$$

Si $z = (x, y)$

$$iz = (0, 1)(x, y) = (0x - y, 0y + x) = (-y, x)$$

$iz - 1 = (-y - 1, x)$ entonces

$$
\begin{aligned}
|iz - 1| &= \sqrt{(-y - 1)^2 + x^2} \\
|iz - 1|^n &= \left(\sqrt{(-y - 1)^2 + x^2}\right)^n \qquad (5.28)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{z} &= (x, -y) \\
\bar{z} - i &= (x, -y - 1)
\end{aligned}
$$

luego

$$
\begin{aligned}
|\bar{z} - i| &= \sqrt{x^2 + (-y - 1)^2} \\
|\bar{z} - i|^n &= \left(\sqrt{x^2 + (-y - 1)^2}\right)^n \qquad (5.29)
\end{aligned}
$$

entonces

$$|iz - 1|^n - |\bar{z} - i|^n = 0 \Longrightarrow E = 0$$

Ejercicio 5.22

1) Si $w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k = 0, 1, 2, \ldots n - 1$ y n impar. Calcular $\prod_{k=0}^{n-1}(1 + w_k)$

2) Si $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$. Hallar $(z^n + \bar{z}^n)$ donde $n \in \mathbb{Z}^+$

Solución.
En efecto

1)

$$w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}},\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$
$$z^n = 1$$
$$z^n - 1 = 0$$

$$(z^n - 1) = (z - w_0)(z - w_1)(z - w_2)\ldots(z - w_{n-1}) \quad (n \text{ factores})$$

Si $z = -1$

$$(-1)^n - 1 = (-1 - w_0)(-1 - w_1)(-1 - w_2)\ldots(-1 - w_{n-1})$$
$$= (-1)^n(1 + w_0)(1 + w_1)(1 + w_2)\ldots(1 + w_{n-1})$$
$$(-2) = -\prod_{k=0}^{n-1}(1 + w_k)$$

entonces $\prod_{k=0}^{n-1}(1 + w_k) = 2$

2) Si $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ entonces

$$r = |z| = 1, \quad \theta = \arg(z) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$
$$z = e^{i2\pi/3} \Longrightarrow z^n = e^{i\frac{2n\pi}{3}}$$

$\bar{z} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ entonces

$$r = |\bar{z}| = 1, \quad \theta_1 = \arg(\bar{z}) = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$
$$\bar{z} = e^{i\frac{4\pi}{3}} \Longrightarrow \bar{z}^n = e^{i\frac{4n\pi}{3}}$$

$$(z^n + \bar{z}^n) = (\cos\frac{2n\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2n\pi}{3}) + (\cos\frac{4n\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4n\pi}{3})$$

$$= (\cos\frac{2n\pi}{3} + \cos\frac{4n\pi}{3}) + i(\operatorname{sen}\frac{2n\pi}{3} + \operatorname{sen}\frac{4n\pi}{3})$$
$$= 2\cos(\frac{A+B}{2})\cos\frac{(A-B)}{2} + i2\operatorname{sen}(\frac{A+B}{2})\cos(\frac{A-B}{2})$$

donde $A = \frac{4n\pi}{3}$ y $B = \frac{2n\pi}{3}$

$$= 2\cos n\pi\cos\frac{n\pi}{3} + 2i(\operatorname{sen} n\pi\cos\frac{n\pi}{3})$$
$$= 2(-1)^n\cos\frac{n\pi}{3}$$

Ejercicio 5.23

Si $E = \frac{e^{i2x}+e^{i4x}+e^{i6x}+e^{i8x}}{e^{i2x}+e^{i3x}+e^{i4x}+e^{i5x}}$. Hallar $\frac{\operatorname{Re}(E)}{2\cos x-1}$

Solución.

$$E = \frac{e^{i2x}(1+e^{i2x}+e^{i4x}+e^{i6x})}{e^{i2x}(1+e^{ix}+e^{i2x}+e^{i3x})}$$
$$= \frac{1+e^{i2x}+(e^{i2x})^2+(e^{i2x})^3}{1+e^{ix}+(e^{ix})^2+(e^{ix})^3}$$
$$= \frac{\frac{1-(e^{i2x})^4}{1-e^{i2x}}}{\frac{1-(e^{ix})^4}{1-e^{ix}}}$$
$$= \frac{(1-e^{i8x})(1-e^{ix})}{(1-e^{i2x})(1-e^{i4x})}$$
$$= \frac{e^{i4x}(e^{-i4x}-e^{i4x})e^{i\frac{x}{2}}(e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}})}{e^{ix}(e^{-ix}-e^{ix})e^{i2x}(e^{-i2x}-e^{i2x})}$$
$$= \frac{e^{i\frac{3x}{2}}(-2i\operatorname{sen}4x)(-2i\operatorname{sen}\frac{x}{2})}{(-2i\operatorname{sen}x)(-2i\operatorname{sen}2x)}$$
$$= \frac{e^{i\frac{3x}{2}}\operatorname{sen}4x\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}x\operatorname{sen}2x}$$
$$= e^{i\frac{3x}{2}}\frac{(2\operatorname{sen}2x\cos 2x)\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}x\operatorname{sen}2x}$$
$$= e^{i\frac{3x}{2}}\frac{2\cos 2x\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}x}$$

$$= e^{i\frac{3x}{2}} \frac{2\cos 2x \operatorname{sen}\frac{x}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$
$$= e^{i\frac{3x}{2}} \frac{\cos 2x}{\cos\frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{Re}(E) = \frac{\cos 2x}{\cos\frac{x}{2}} \cos\frac{3x}{2}$$

$$\begin{aligned}
\cos\frac{3x}{2} &= \cos(x + \frac{x}{2}) \\
&= \cos x \cos\frac{x}{2} - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\frac{x}{2} \\
&= \cos x \cos\frac{x}{2} - 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2} \\
&= \cos\frac{x}{2}(\cos x - 2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}) \\
&= \cos\frac{x}{2}(\cos x - (1 - \cos x)) \\
&= \cos\frac{x}{2}(2\cos x - 1)
\end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}(E) = \frac{\cos 2x}{\cos\frac{x}{2}} \cos\frac{x}{2}(2\cos x - 1)$$
$$\frac{\operatorname{Re}(E)}{2\cos x - 1} = \cos 2x$$

Ejercicio 5.24

D.q.

$$\begin{vmatrix} 1 & e^{i\theta} & e^{i3\theta} \\ 1 & e^{i2\theta} & e^{i6\theta} \\ 1 & e^{i3\theta} & e^{i9\theta} \end{vmatrix} = (e^{i\theta} + e^{i2\theta} + e^{i3\theta}) \begin{vmatrix} 1 & e^{i\theta} & e^{i5\theta} \\ 1 & e^{i2\theta} & e^{i4\theta} \\ 1 & e^{i3\theta} & e^{i3\theta} \end{vmatrix}$$

Solución.
Hacemos $a = e^{i\theta}, b = e^{i2\theta}, c = e^{i3\theta}$ D.q.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$$

Demostrado en el Ejercicio 1.22 Sección 1.2.2 Capítulo 1, Tomo 1.

5.12 Ejercicios propuestos

1) Resolver las siguientes ecuaciones de números complejos

(a) $z^5 = 32$

(b) $(1+z)^5 = (1-z)^5$

2) Calcular $A = (1 + \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)^n$

3) Hallar todas las raíces de las siguientes ecuaciones

(a) $\bar{z} = z^4$

Rpta: $z^5 = a^2 + b^2,\ z = (a^2+b^2)^{1/5}$

(b) $z^6 - 2iz^3 - 1 = 0$

Rpta: $z^3 = i,\ w_k = e^{i}(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}), k = 0, 1, 2$

4) Sea $z = -i$. Calcular $(z^p)^q$ y $(z^q)^p$ si $p = \frac{1}{3}, q = 3$

5) Hallar todos los números complejos z que satisfacen la ecuación

$$\left(\frac{3+z}{1+i}\right)^n = (3-z)^n,\ n \in \mathbb{Z}^+$$

6) Si z es un número complejo. Resolver la ecuación $(z+1)^5 + z^5 = 0$

7) Hallar el valor de la expresión

$$w = z^{142} + \frac{1}{z^{142}}$$

si se sabe que z es la raíz de la ecuación $z^2 - z + 1 = 0$.

Rpta: $z = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \theta = \frac{\pi}{3}, z = e^{i\frac{\pi}{3}}, w = -1$

8) Si $z = \frac{1}{i^{11}} + \frac{1}{i^{12}} + \frac{1}{i^{13}} + \frac{1}{i^{101}} + \frac{1}{i^{103}} = 1$

(a) Calcular $w = \frac{(z+i)^n}{(z-i)^{n-2}}; n \in \mathbb{Z}^+$

(b) Hallar las raíces de orden 5 de w si $n = 144$

9) Calcular $A = 1 + 2w + 3w^2 + \cdots + nw^{n-1}$ donde w es la raíz n-ésima de la unidad, $n \in \mathbb{Z}^+$

Rpta: $A = \begin{cases} \frac{n(n+1)}{2}, & \text{si } w = 1 \\ \frac{n}{w-1}, & \text{si } w \neq 1 \end{cases}$

10) Si z_1 y z_2 son números complejos d.q.

(a) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

(b) $|z_1| + |z_2| = \left|\frac{z_1+z_2}{2} - \sqrt{z_1 z_2}\right| + \left|\frac{z_1+z_2}{2} + \sqrt{z_1 z_2}\right|$

11) Sean z_1, z_2 y z_3 números complejos d.q.

(a) $|z_1 + z_2 + z_3| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3|$

(b) $\overline{z_1 + z_2 + z_3} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3$

(c) $|z_1 z_2 z_3| = |z_1||z_2||z_3|$

12) Calcular

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 & w^4 \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 & w^8 \\ 1 & w^3 & w^6 & w^9 & w^{12} \\ 1 & w^4 & w^8 & w^{12} & w^{16} \end{vmatrix}$$

donde $w = e^{i\frac{2\pi}{5}}$

13) Si z_1, z_2 y z_3 son números complejos no nulos d.q.

$$\frac{|z_1|}{|z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_3|} + \frac{|z_3|}{|z_1|} \geq 3$$

14) Hallar la parte real de $z_1z_2z_3z_4$ sabiendo que z_1 y z_2 son las raíces de la ecuación $z^2+(2i-3)z+(5-i)=0$ y z_2 y z_4 son las raíces cuadradas del número complejo $-24-10i$

15) Sea

$$A=\begin{pmatrix} 1 & w^7 & w^6 & \cdots & w \\ z & 1 & w^7 & \cdots & w^2 \\ z^2 & z & 1 & \cdots & w^3 \\ & & & & \\ z^7 & z^6 & z^5 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar $\frac{\text{Re}\,(|A|)}{\text{Img}\,(|A|)}$ si se sabe que

$$z=\cos\frac{\pi}{5}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{5}$$
$$w=\cos\frac{2\pi}{9}+i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{9}$$

Rpta: $\frac{\text{Re}\,(|A|)}{\text{Img}\,(|A|)}=-\cot\frac{22\pi}{90}$

16) (a) Si z_1 y z_2 son números complejos tales que $|z_1|=|z_2|=1$. D.q. $\frac{z_1-z_2}{z_1+z_2}$, $z_1\neq -z_2$ es imaginario puro.

(b) Para qué valores de z, $(1-i)z^2-4z=-3-9i$

17) (a) Si $z_1=2-2\sqrt{3}i$, $z_2=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$, $z_3=i+e^{i\alpha}$, $-\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{6}$ encontrar la forma polar de $z_1z_2z_3$

(b) Usando el resultado de la parte (a) si $\alpha=\frac{\pi}{12}$, encontrar las raíces de orden 5 del conjugado de $z_1z_2z_3$

18) Si z es un número complejo tal que $iz^{2n}+(i-1)z^n-1=0$. Calcular z.

19) D.q. si z_1 y z_2 son números complejos tales que $|z_1|<1$ y $|z_2|<1$ entonces

$$\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1z_2}\right|<1$$

20) (a) Si z es un número complejo, hallar el valor máximo de A, donde $A=-\text{Re}\,(z)\text{Re}\,(z^{-1})\text{Img}\,(z)\text{Img}\,(z^{-1})$

(b) Si z_1, z_2, z_3 y z_4 son números complejos no nulos D.q.

$$\frac{|z_2||z_3||z_4|}{|z_1|} + \frac{|z_1||z_3||z_4|}{|z_2|} + \frac{|z_1||z_2||z_4|}{|z_3|} + \frac{|z_1||z_2||z_3|}{|z_4|} \geq |z_1z_2 + z_2z_4 + z_3z_4 + z_1z_3|$$

21) Si $iz^{2n} + (i-1)z^n - 1 = 0$. Calcular z

$$z = (-1)^n, \qquad z = (-i)^n$$
$$w_k = e^{i(\frac{\pi+2k\pi}{n})}, \qquad w_k = e^{i(\frac{3\pi+4k\pi}{2n})},$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

22) Calcular el área de la región formada por las raíces cuadradas de los números complejos $-15 - 8i$ y $21 + 20i$

23) Calcular el valor o valores de x tal que

$$\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n = z$$

donde z es un número complejo cuyo módulo es 1

Rpta: $x_k = \tan(\frac{\theta}{2n} + \frac{k\pi}{n}), k = 0, 1, \ldots, n-1$, todos los valores de x son reales.

24) Si $z \in \mathbb{C}$ tal que $(|iz + 4| + |\bar{z} + 4i|)|z + 3i| = 0$ donde $\arg(z) = \theta$ y $0 < \theta < \pi$. Calcular $z^{12} + \frac{1}{z^{12}}$

25) Las raíces de orden 2 de $z_1 = 33 - 56i$ son $w_0 = (a, b)$ y $w_1 = (c, d)$.

Las raíces de orden 2 de $z_2 = -63 + 16i$ son $w'_0 = (e, f)$ y $w'_1 = (g, h)$

$$P_1 = (a, b, 3) \quad P_2 = (c, d, 1) \quad P_3 = (e, f, 0), \ P_4 = (g, h, 2)$$

Indicar si estos cuatro puntos son coplanares. Justificar

5.13 Series trigonométricas y los números complejos

La teoría de los números complejos, es útil en el desarrollo de series trigonométricas.

Teorema 5.9: Serie telescópica

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=a_n-a_0$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k) &= (a_1-a_0)+(a_2-a_1)+\cdots+(a_{n-1}-a_{n-2})+(a_n-a_{n-1})\\ &= a_n-a_0\end{aligned}$$

◇

Teorema 5.10: Serie geométrica

$$\sum_{k=0}^{n-1}x^k=\frac{1-x^n}{1-x},\ x\neq 1, x\in\mathbb{R}$$

Demostración. Si en la serie telescópica hacemos $a_k=x^k$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(x^{k+1}-x^k)=x^n-x^0$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}x^k(x-1)=x^n-1$$

luego

$$\sum_{k=0}^{n-1}x^k=\frac{x^n-1}{x-1},\ \forall x\neq 1 \text{ real}$$

Por tanto

$$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x},\ x\neq 1 \text{ (serie geométrica)}$$



Teorema 5.11

Calcular la suma de las raíces de orden n de la unidad

Solución.

$$z^n = 1$$
$$z = 1^{1/n} = e^{i0}$$

$$w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}};\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$
$$w_0 = e^{i0} = 1,\ w_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}},\ w_2 = e^{i\frac{4\pi}{n}}, \ldots,\ w_{n-1} = e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} w_k &= 1 + e^{i\frac{2\pi}{n}} + e^{i\frac{4\pi}{n}} + \cdots + e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}\\ &= 1 + e^{i\frac{2\pi}{n}} + (e^{i\frac{2\pi}{n}})^2 + \cdots + (e^{i\frac{2\pi}{n}})^{n-1}\\ &= \frac{1-(e^{i\frac{2\pi}{n}})^n}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}}\\ &= \frac{1-e^{i2\pi}}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0, \text{ para } n > 1\end{aligned}$$

Por tanto

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_k = 0, \text{ para } n > 1$$

Ejemplo 5.35

Calcular

$$Q = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x + \cdots + \operatorname{sen} nx$$

Solución.

Si tomamos

$$P = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots + \cos nx$$

$$P + iQ = (\cos x + i \operatorname{sen} x) + (\cos 2x + i \operatorname{sen} 2x) + \cdots + (\cos nx + i \operatorname{sen} nx)$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{ix} + e^{i2x} + e^{i3x} + \cdots + e^{inx} \\
&= e^{ix}(1 + e^{ix} + e^{i2x} + \cdots + e^{i(n-1)x}) \\
&= e^{ix}(1 + e^{ix} + (e^{ix})^2 + \cdots + (e^{ix})^{n-1}) \\
&= e^{ix}\Big(\frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}}\Big) \\
&= e^{ix}\frac{e^{\frac{inx}{2}}(e^{-\frac{inx}{2}} - e^{\frac{inx}{2}})}{e^{\frac{ix}{2}}(e^{-\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}})} \\
&= e^{i(n+1)\frac{x}{2}}\Big(\frac{-2i \operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{-2i \operatorname{sen}\frac{x}{2}}\Big) \\
&= \frac{\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} e^{i(n+1)\frac{x}{2}} \\
&= \frac{\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} (\cos(n+1)\frac{x}{2} + i \operatorname{sen}(n+1)\frac{x}{2})
\end{aligned}
$$

$$P = \frac{\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \cos(n+1)\frac{x}{2} \text{ y } Q = \frac{\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \operatorname{sen}(n+1)\frac{x}{2}$$

Ejemplo 5.36

Calcular

$$A = \cos^2 x + \cos^2 2x + \cdots + \cos^2 nx$$

Solución.

Se sabe que $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ entonces

$$
\begin{aligned}
A &= \Big(\frac{1 + \cos 2x}{2}\Big) + \Big(\frac{1 + \cos 4x}{2}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1 + \cos 2nx}{2}\Big) \\
&= \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{2}\Big) + \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x + \cdots + \cos 2nx) \\
&= \frac{n}{2} + \frac{1}{2}P
\end{aligned}
$$

donde

$$P = \cos 2x + \cos 4x + \cdots + \cos 2nx$$

Si tomamos

$$Q = \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x + \cdots + \operatorname{sen} 2nx$$

$$
\begin{aligned}
P + iQ &= e^{i2x} + e^{i4x} + \cdots + e^{i2nx} \\
&= e^{i2x}(1 + e^{i2x} + e^{i4x} + \cdots + e^{i2(n-1)x}) \\
&= e^{i2x}(1 + e^{i2x} + (e^{i2x})^2 + \cdots + (e^{i2x})^{n-1}) \\
&= e^{i2x}\frac{1 - (e^{i2x})^n}{1 - e^{i2x}} \\
&= e^{i2x}\frac{e^{inx}(e^{-inx} - e^{inx})}{e^{ix}(e^{-ix} - e^{ix})} \\
&= e^{i(n+1)x}\left(\frac{-2i \operatorname{sen} nx}{-2i \operatorname{sen} x}\right) \\
&= \frac{\operatorname{sen} nx}{\operatorname{sen} x} e^{i(n+1)x}
\end{aligned}
$$

se tiene

$$P = \frac{\operatorname{sen} nx}{\operatorname{sen} x}\cos(n+1)x \text{ y } Q = \frac{\operatorname{sen} nx}{\operatorname{sen} x}\operatorname{sen}(n+1)x$$

Por tanto

$$A = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen} nx}{\operatorname{sen} x}\right)\cos(n+1)x$$

Ejemplo 5.37

Calcular

$$F = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 3x + \operatorname{sen}^2 5x + \cdots + \operatorname{sen}^2(n+1)x$$

Solución.

Se sabe que

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$
\begin{aligned}
F &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) + \left(\frac{1 - \cos 6x}{2}\right) + \left(\frac{1 - \cos 10x}{2}\right) + \cdots \\
&\quad + \left(\frac{1 - \cos 2(2n-1)x}{2}\right) \\
&= (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 6x + \cos 10x + \cdots \\
&\quad + \cos 2(2n-1)x) \\
&= \frac{n}{2} - \frac{1}{2}G
\end{aligned}
$$

donde

$$G = \cos 2x + \cos 6x + \cos 10x + \cdots + \cos 2(2n-1)x$$
$$H = \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 6x + \operatorname{sen} 10x + \cdots + \operatorname{sen} 2(2n-1)x$$

$$\begin{aligned}
G + iH &= e^{i2x} + e^{i6x} + e^{i10x} + \cdots + e^{i2(2n-1)x} \\
&= e^{i2x}(1 + e^{i4x} + e^{i8x} + \cdots + e^{i2(2n-2)x}) \\
&= e^{i2x}(1 + e^{i4x} + (e^{i4x})^2 + \cdots + (e^{i4x})^{n-1}) \\
&= e^{i2x}\left(\frac{1-(e^{i4x})^n}{1-e^{i4x}}\right) \\
&= e^{i2x}\frac{e^{i2nx}(e^{-i2nx} - e^{i2nx})}{e^{i2x}(e^{-i2x} - e^{i2x})} \\
&= e^{i2nx}\left(\frac{-2i \operatorname{sen} 2nx}{-2i \operatorname{sen} 2x}\right) \\
&= \frac{\operatorname{sen} 2nx}{\operatorname{sen} 2x} e^{i2nx}
\end{aligned}$$

se tiene

$$G = \frac{\operatorname{sen} 2nx}{\operatorname{sen} 2x}\cos 2nx = \frac{\operatorname{sen} 4nx}{2 \operatorname{sen} 2x}$$
$$H = \frac{\operatorname{sen} 2nx}{\operatorname{sen} 2x}\operatorname{sen} 2nx = \frac{\operatorname{sen}^2(2nx)}{\operatorname{sen} 2x}$$

Por tanto

$$F = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}G = \frac{n}{2} - \frac{1}{4}\frac{\operatorname{sen} 4nx}{\operatorname{sen} 2x}$$

Ejemplo 5.38

Calcular

$$A = \cos^3 1° + \cos^3 3° + \cos^3 5° + \cdots + \cos^3 59°$$

Solución.

Podemos escribir

$$A = \cos^3 x + \cos^3 3x + \cos^3 5x + \cdots + \cos^3(2n-1)x, \text{ para } x = 1° \text{ y } n = 3($$

$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$ entonces

$$\begin{aligned}\cos^3\alpha &= \frac{1}{8}(e^{i3\alpha} + 3e^{i\alpha} + 3e^{-i\alpha} + e^{-i3\alpha})\\ &= \frac{1}{8}(e^{i3\alpha} + e^{-i3\alpha}) + \frac{3}{8}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})\\ &= \frac{1}{4}\cos 3\alpha + \frac{3}{4}\cos\alpha\end{aligned}$$

entonces

$$4\cos^3\alpha = \cos 3\alpha + 3\cos\alpha$$

Utilizando este resultado, degradamos A

$$\begin{aligned}4A &= 4\cos^3 x + 4\cos^3 3x + 4\cos^3 5x + \cdots + 4\cos^3(2n-1)x\\ &= (\cos 3x + 3\cos x) + (\cos 3(3x) + 3\cos(3x)) + (\cos 3(5x) + 3\cos(5x)) +\\ &\qquad \cdots + (\cos 3(2n-1)x + 3\cos(2n-1)x)\\ &= \cos 3x + \cos 3(3x) + \cos 3(5x) + \cdots + \cos 3(2n-1)x) +\\ &\qquad 3(\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cdots + \cos(2n-1)x)\\ &= P + 3Q\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}Q &= \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cdots + \cos(2n-1)x\\ T &= \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x + \cdots + \operatorname{sen}(2n-1)x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q + iT &= e^{ix} + e^{i3x} + e^{i5x} + \cdots + e^{i(2n-1)x}\\ &= e^{ix}(1 + e^{i2x} + e^{i4x} + \cdots + e^{i(2n-2)x})\\ &= e^{ix}(1 + e^{i2x} + (e^{i2x})^2 + \cdots + (e^{i2x})^{n-1})\\ &= e^{ix}\Big(\frac{1-(e^{i2x})^n}{1-e^{i2x}}\Big)\\ &= e^{ix}\frac{e^{inx}(e^{-inx} - e^{inx})}{e^{ix}(e^{-ix} - e^{ix})}\end{aligned}$$

$$= e^{inx}\left(\frac{-2i\ \text{sen}\, nx}{-2i\ \text{sen}\, x}\right)$$
$$= \frac{\text{sen}\, nx}{\text{sen}\, x} e^{inx}$$

$$Q = \frac{\text{sen}\, nx}{\text{sen}\, x}\cos nx = \frac{\text{sen}\, 2nx}{2\,\text{sen}\, x}$$
$$P = \frac{\text{sen}\, 2n(3x)}{2\,\text{sen}(3x)}$$

Luego $4A = P + 3Q$ entonces

$$A = \frac{1}{4}P + \frac{3}{4}Q$$

para $n = 30$ y $x = 1°$ entonces

$$A = \frac{1}{4}(0) + \frac{3}{4}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\,\text{sen}\, 1°}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{16}\csc 1°$$

Ejemplo 5.39

Calcular

$$A = \cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \cdots + n\cos nx$$

Solución.
Si hacemos

$$B = \text{sen}\, x + 2\,\text{sen}\, 2x + 3\,\text{sen}\, 3x + \cdots + n\,\text{sen}\, nx$$

$$A + iB = e^{ix} + 2e^{i2x} + 3e^{i3x} + \cdots + ne^{inx}$$

$$z = e^{ix} + 2e^{i2x} + 3e^{i3x} + \cdots + ne^{inx}$$
$$e^{ix}z = \qquad e^{i2x} + 2e^{i3x} + \cdots + (n-1)e^{inx} + ne^{i(n+1)x}$$

restando

$$(1 - e^{ix})z = e^{ix} + e^{i2x} + e^{i3x} + \cdots + e^{inx} - ne^{i(n+1)x}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{ix}(1 + e^{ix} + e^{i2x} + \cdots + e^{i(n-1)x}) - ne^{i(n+1)x} \\
&= e^{ix}\Big(\frac{1-(e^{ix})^n}{1+e^{ix}}\Big) - ne^{i(n+1)x} \\
&= e^{ix}\frac{e^{i\frac{nx}{2}}}{e^{i\frac{n}{2}}}\Big(\frac{e^{-i\frac{nx}{2}} - e^{i\frac{nx}{2}}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}}\Big) - ne^{i(n+1)x} \\
(1-e^{ix})z &= e^{i(\frac{n+1}{2})x}\frac{\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} - ne^{i(n+1)x} \\
z &= \frac{e^{i(\frac{n+1}{2})x}}{(1-e^{ix})}\frac{\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} - \frac{ne^{i(n+1)x}}{(1-e^{ix})} \qquad (5.30)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1-e^{ix} &= e^{i\frac{x}{2}}(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}) \\
&= -2i\operatorname{sen}\frac{x}{2}e^{i\frac{x}{2}} \qquad (5.31)
\end{aligned}
$$

Reemplazando (5.31) en (5.30)

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}(-2i\operatorname{sen}\frac{x}{2})}e^{i\frac{nx}{2}} + \frac{ne^{i(\frac{2n+1}{2})x}}{2i\operatorname{sen}\frac{x}{2}}, \qquad i = e^{i\frac{\pi}{2}} \\
z &= \frac{\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}e^{i(\frac{nx}{2}+\frac{\pi}{2})} - \frac{n}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}e^{i((\frac{2n+1}{2})x+\frac{\pi}{2})} \\
A = \operatorname{Re}(z) &= \frac{\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}\cos(\frac{nx}{2}+\frac{\pi}{2}) - \frac{n}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\cos((\frac{2n+1}{2})x+\frac{\pi}{2}) \\
&= \frac{-\operatorname{sen}^2\frac{nx}{2}}{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} + \frac{n\operatorname{sen}(\frac{2n+1}{2}x)}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 5.40

Si $z = re^{i\theta}$ donde $r = |z| = 1, \arg(z) = \theta, z^n = 1, z \neq 1$ y

$$M = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \cdots + nz^{n-1}.$$

Calcular Re $(\bar{M})$ y Img $(\bar{M})$.

Solución.
Si

$$
\begin{aligned}
M &= 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \cdots + nz^{n-1} \\
zM &= z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots + (n-1)z^{n-1} + nz^n \\
(1-z)M &= 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n-1} - n \\
&= \frac{1-z^n}{1-z} - n \\
&= -n \\
M &= \frac{-n}{1-z} \qquad (5.32)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1 - z = 1 - (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) &= 1 - \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta \\
&= 2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} - 2i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\
&= 2(-i^2)\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} - 2i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\
&= -2i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}) \\
&= -2i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}} \qquad (5.33)
\end{aligned}
$$

(5.33) en (5.32)

$$
\begin{aligned}
M &= \frac{n}{2i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}} = \frac{ne^{-i\frac{\theta}{2}}}{2i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} = \frac{ine^{-i\frac{\theta}{2}}}{-2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} \\
&= -\frac{ni}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}(\cos\frac{\theta}{2} - i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}) \\
&= \frac{n}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}(-\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} - i\cos\frac{\theta}{2}) \\
&= -\frac{n}{2} - i\frac{n}{2}\cot\frac{\theta}{2}
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\bar{M} = -\frac{n}{2} + i\frac{n}{2}\cot\frac{\theta}{2}
$$

$$\text{Re}\,(\bar{M}) = -\frac{n}{2}, \qquad \text{Img}\,(\bar{M}) = \frac{n}{2}\cot\frac{\theta}{2}$$

Ejemplo 5.41

Si $x + y + z = \pi$ demostrar que

$$\text{sen}^3 x + \text{sen}^3 y + \text{sen}^3 z = 3\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2} + \cos\frac{3x}{2}\cos\frac{3y}{2}\cos\frac{3z}{2}$$

Solución.

$$\begin{aligned}\text{sen}^3 x = \Big(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\Big)^3 &= \frac{1}{-8i}(e^{i3x} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-i3x})\\ &= -\frac{1}{4}\Big(\frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i}\Big) + \frac{3}{4}\Big(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\Big)\\ &= \frac{3}{4}\,\text{sen}\,x - \frac{1}{4}\,\text{sen}\,3x\end{aligned}$$

$$4\,\text{sen}^3 x = 3\,\text{sen}\,x - \text{sen}\,3x$$

$$\begin{aligned}&4(\text{sen}^3 x + \text{sen}^3 y + \text{sen}^3 z)\\ &= 4\,\text{sen}^3 x + 4\,\text{sen}^3 y + 4\,\text{sen}^3 z\\ &= (3\,\text{sen}\,x - \text{sen}\,3x) + (3\,\text{sen}\,y - \text{sen}\,3y) + (3\,\text{sen}\,z - \text{sen}\,3z)\\ &= 3(\text{sen}\,x + \text{sen}\,y + \text{sen}\,z) - (\text{sen}\,3x + \text{sen}\,3y + \text{sen}\,3z)\\ &= 3\Big(2\,\text{sen}(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{(x-y)}{2}) + 2\,\text{sen}\,\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}\Big)\\ &\quad - \Big(2\,\text{sen}(\frac{3x+3y}{2})\cos(\frac{3x-3y}{2}) + 2\,\text{sen}\,\frac{3z}{2}\cos\frac{3z}{2}\Big) \qquad (5.34)\end{aligned}$$

$x + y + z = \pi$ entonces

$$\begin{cases} x + y = \pi - z \Longrightarrow \dfrac{x+y}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{z}{2},\ \text{sen}(\dfrac{x+y}{2}) = \cos\dfrac{z}{2}\\ 3x + 3y = 3\pi - 3z \Longrightarrow \dfrac{3x+3y}{2} = \dfrac{3\pi}{2} - \dfrac{3z}{2},\ \text{sen}(\dfrac{3x+3y}{2}) = -\cos\dfrac{3z}{2}\end{cases}$$

En (5.34)

$$= 3\Big(2\cos\frac{z}{2}\cos(\frac{x-y}{2}) + 2\,\text{sen}\,\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}\Big)$$

$$-\Big(-2\cos\frac{3z}{2}\cos(\frac{3x-3y}{2})+2\,\mathrm{sen}\,\frac{3z}{2}\cos\frac{3z}{2}\Big)$$

$$=3\Big(2\cos\frac{z}{2}\Big(\cos(\frac{x-y}{2})+\mathrm{sen}\,\frac{z}{2}\Big)\Big)-\Big(-2\cos\frac{3z}{2}(\cos(\frac{3x-3y}{2})-\mathrm{sen}\,\frac{3z}{2})\Big) \qquad (5.35)$$

$z=\pi-(x+y)$ entonces:

$$\begin{cases} \dfrac{z}{2}=\dfrac{\pi}{2}-(\dfrac{x+y}{2}) \Longrightarrow \mathrm{sen}\,\dfrac{z}{2}=\cos(\dfrac{x+y}{2}) \\ \dfrac{3z}{2}=\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{3(x+y)}{2} \Longrightarrow \mathrm{sen}\,\dfrac{3z}{2}=-\cos(\dfrac{3(x+y)}{2}) \end{cases}$$

En (5.35)

$$=3\Big(2\cos\frac{z}{2}\Big(\cos(\frac{x-y}{2})+\cos(\frac{x+y}{2})\Big)\Big)$$

$$-\Big(-2\cos\frac{3z}{2}\Big(\cos(\frac{3x-3y}{2})+\cos(\frac{3x+3y}{2})\Big)\Big)$$

$$=3\Big(2\cos\frac{z}{2}\Big(2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\Big)\Big)-\Big(-2\cos\frac{3z}{2}\Big(2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{3y}{2}\Big)\Big)$$

$$=(3)(4)\Big(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}\Big)+4\Big(\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{3y}{2}\cos\frac{3z}{2}\Big)$$

Por lo tanto

$$\mathrm{sen}^3 x+\mathrm{sen}^3 y+\mathrm{sen}^3 z=3\Big(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}\Big)+\Big(\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{3y}{2}\cos\frac{3z}{2}\Big)$$

5.14 Ejercicios resueltos

Ejercicio 5.25

D.q.

$$\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{n}\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{n}\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{n}\cdots\mathrm{sen}\,\frac{(n-1)}{n}\pi=\frac{n}{2^{n-1}},\ \forall n\geq 2$$

Solución.
Partimos de la ecuación

$$z^n = 1 \Longrightarrow z = 1^{1/n}$$

$$1 = e^{i0} \Longrightarrow w_k = 1^{1/n} e^{i(\frac{2k\pi}{n})},\ k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$\begin{aligned} z^n - 1 &= (z - w_0)(z - w_1)(z - w_2)\cdots(z - w_{n-1}) \quad \text{(n factores)} \\ &= (z - 1)(z - w_1)(z - w_2)\cdots(z - w_{n-1}) \end{aligned}$$

Si $z \neq 1$ entonces

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = (z - w_1)(z - w_2)\cdots(z - w_{n-1}) \quad \text{(n-1 factores)}$$

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = (z - w_1)(z - w_2)\cdots(z - w_{n-1})$$

Si $z = 1$ entonces:

$$\begin{aligned} n &= (1 - w_1)(1 - w_2)\cdots(1 - w_{n-1}) \\ \bar{n} &= (1 - \bar{w}_1)(1 - \bar{w}_2)\cdots(1 - \bar{w}_{n-1}) \\ n^2 &= (1 - w_1)(1 - \bar{w}_1)(1 - w_2)(1 - \bar{w}_2)\cdots(1 - w_{n-1})(1 - \bar{w}_{n-1}) \quad (5.36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 - w_1)(1 - \bar{w}_1) &= (1 - e^{i\frac{2\pi}{n}})(1 - e^{-i\frac{2\pi}{n}}) \\ &= (1 - e^{-i\frac{2\pi}{n}} - e^{i\frac{2\pi}{n}} + 1) \\ &= 2 - (e^{i\frac{2\pi}{n}} + e^{-i\frac{2\pi}{n}}) \\ &= 2 - 2\cos\frac{2\pi}{n} \\ &= 2(1 - \cos\frac{2\pi}{n}) \\ &= 2(2\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{n}) \\ &= (2\operatorname{sen}\frac{\pi}{n})^2 \end{aligned}$$

En (5.36)

$$n^2 = (2\operatorname{sen}\frac{\pi}{n})^2(2\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n})^2\cdots(2\operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{n})^2$$

$$n = (2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{n})(2\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{n})\cdots(2\,\text{sen}\,\frac{(n-1)\pi}{n})$$
$$\frac{n}{2^{n-1}} = \text{sen}\,\frac{\pi}{n}\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{n}\cdots\text{sen}\,\frac{(n-1)\pi}{n} \qquad \forall n \geq 2$$

Ejercicio 5.26

Calcular

$$\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{2\pi}{2n}\cos\frac{3\pi}{2n}\cdots\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}$$

Solución.
En el ejercicio anterior

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{n}\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{n}\cdots\text{sen}\,\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

$$(2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n})(2\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{2n}\cos\frac{2\pi}{2n})\cdots(2\,\text{sen}\,\frac{(n-1)\pi}{2n}\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}) = \frac{n}{2^{n-1}}$$
$$2^{n-1}(\text{sen}\,\frac{\pi}{2n}\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{2n}\cdots\text{sen}\,\frac{(n-1)\pi}{2n})(\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{2\pi}{2n}\cdots\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}) = \frac{n}{2^{n-1}}$$

$$\text{sen}\,\frac{(n-1)\pi}{2n} = \text{sen}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}) = \cos\frac{\pi}{2n}$$
$$\cos^2\frac{\pi}{2n}\cos^2\frac{2\pi}{2n}\cdots\cos^2\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{n}{(2^{n-1})^2}$$
$$\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{2\pi}{2n}\cdots\cos\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

también

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{2n}\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{2n}\cdots\text{sen}\,\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

Ejercicio 5.27

Calcular

$$A = \text{sen}\,\frac{\pi}{25}\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{25}\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{25}\cdots\text{sen}\,\frac{12\pi}{25}$$

Solución.

Si hacemos $25 = 2n + 1$ y $n = 12$

$$A = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2n+1} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{2n+1} \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2n+1} \cdots \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2n+1}$$

Partimos de la ecuación

$$z^{2n+1} = 1 \Longrightarrow z = 1^{1/2n+1}$$

$$1 = e^{i0} \Longrightarrow w_k = 1^{1/2n+1} e^{i(\frac{2k\pi}{2n+1})}; k = 0, 1, 2, \ldots 2n$$

$$z^{2n+1} - 1 = (z - w_0)(z - w_1) \cdots (z - w_n)(z - w_{n+1}) \cdots (z - w_{2n})$$

$(2n + 1)$ factores

$$z^{2n+1} - 1 = (z - 1)(z - w_1) \cdots (z - w_n)(z - w_{n+1}) \cdots (z - w_{2n})$$

Si $z \neq 1$, entonces

$$\frac{z^{2n+1} - 1}{z - 1} = (z - w_1) \cdots (z - w_n)(z - w_{n+1}) \cdots (z - w_{2n}) \text{ (}2n\text{ factores)}$$

$$z^{2n} + z^{2n-1} + \cdots + z + 1 = (z - w_1) \cdots (z - w_n)(z - w_{n+1}) \cdots (z - w_{2n})$$

Si $z = 1$ entonces

$$\begin{aligned}
2n + 1 &= (1 - w_1) \cdots (1 - w_n)(1 - w_{n+1}) \cdots (1 - w_{2n}) \\
\overline{2n + 1} &= (1 - \bar{w}_1) \cdots (1 - \bar{w}_n)(1 - \bar{w}_{n+1}) \cdots (1 - \bar{w}_{2n}) \\
(2n + 1)^2 &= (1 - w_1)(1 - \bar{w}_1) \cdots (1 - w_n)(1 - \bar{w}_n)(1 - w_{n+1})(1 - \bar{w}_{n+1}) \\
&\quad \cdots (1 - w_{2n})(1 - \bar{w}_{2n}) \qquad (5.37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1 - w_1)(1 - \bar{w}_1) &= (1 - e^{i\frac{2\pi}{2n+1}})(1 - e^{-i\frac{2\pi}{2n+1}}) \\
&= 1 - e^{-i\frac{2\pi}{2n+1}} - e^{i\frac{2\pi}{2n+1}} + 1 \\
&= 2 - (e^{-i\frac{2\pi}{2n+1}} + e^{i\frac{2\pi}{2n+1}}) \\
&= 2 - 2\cos\frac{2\pi}{2n+1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2(1-\cos\frac{2\pi}{2n+1})\\
&= 2(2\,\mathrm{sen}^2\frac{\pi}{2n+1})\\
&= (2\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2n+1})^2
\end{aligned}
$$

En (5.37)

$$
\begin{aligned}
(2n+1)^2 &= (2\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2n+1})^2\cdots(2\,\mathrm{sen}\frac{n\pi}{2n+1})^2(2\,\mathrm{sen}\frac{(n+1)\pi}{2n+1})^2\\
&\quad\cdots(2\,\mathrm{sen}\frac{2n\pi}{2n+1})^2\\
2n+1 &= (2\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2n+1})\cdots(2\,\mathrm{sen}\frac{n\pi}{2n+1})(2\,\mathrm{sen}\frac{(n+1)\pi}{2n+1})\\
&\quad\cdots(2\,\mathrm{sen}\frac{2n\pi}{2n+1})\\
\frac{2n+1}{2^{2n}} &= \mathrm{sen}\frac{\pi}{2n+1}\cdots\mathrm{sen}\frac{n\pi}{2n+1}\,\mathrm{sen}\frac{(n+1)\pi}{2n+1}\cdots\mathrm{sen}\frac{2n\pi}{2n+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{sen}\frac{2n\pi}{2n+1} &= \mathrm{sen}(\pi-\frac{\pi}{2n+1}) = \mathrm{sen}\frac{\pi}{2n+1}\\
\mathrm{sen}\frac{(n+1)\pi}{2n+1} &= \mathrm{sen}(\pi-\frac{n\pi}{2n+1}) = \mathrm{sen}\frac{n\pi}{2n+1}
\end{aligned}
$$

$$
\frac{2n+1}{2^{2n}} = \mathrm{sen}^2\frac{\pi}{2n+1}\,\mathrm{sen}^2\frac{2\pi}{2n+1}\cdots\mathrm{sen}^2\frac{n\pi}{2n+1}
$$

Entonces

$$
\mathrm{sen}\frac{\pi}{2n+1}\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{2n+1}\cdots\mathrm{sen}\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}
$$

Por lo tanto

$$
A = \frac{5}{2^{12}}
$$

Ejercicio 5.28

Calcular

$$
B = \cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cos\frac{3\pi}{2n+1}\cdots\cos\frac{n\pi}{2n+1}
$$

Solución.
Procediendo como en el ejercicio anterior se tiene la ecuación

$$z^{2n} + z^{2n-1} + \cdots + z^2 + z + 1 = (z - w_1)\cdots(z - w_n)(z - w_{n+1})\cdots(z - w_{2n})$$

($2n$ factores)
Si $z = -1$ entonces

$$\begin{aligned}
1 + (-1) + \cdots + 1 + (-1) + 1 \\
= (-1 - w_1)\cdots(-1 - w_n)(-1 - w_{n+1})\cdots(-1 - w_{2n}) \\
1 = (-1 - w_1)\cdots(-1 - w_n)(-1 - w_{n+1})\cdots(-1 - w_{2n}) \\
\bar{1} = (-1 - \bar{w}_1)\cdots(-1 - \bar{w}_n)(-1 - \bar{w}_{n+1})\cdots(-1 - \bar{w}_{2n})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 = (-1 - w_1)(-1 - \bar{w}_1)\cdots(-1 - w_n)(-1 - \bar{w}_n)\times \\
(-1 - w_{n+1})(-1 - \bar{w}_{n+1})\cdots(-1 - w_{2n})(-1 - \bar{w}_{2n}) \quad (5.38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1 + w_1)(1 + \bar{w}_1) &= (1 + e^{i\frac{2\pi}{2n+1}})(1 + e^{-i\frac{2\pi}{2n+1}}) \\
&= 1 + e^{-i\frac{2\pi}{2n+1}} + e^{i\frac{2\pi}{2n+1}} + 1 \\
&= 2 + e^{i\frac{2\pi}{2n+1}} + e^{-i\frac{2\pi}{2n+1}} \\
&= 2 + 2\cos\frac{2\pi}{2n+1} \\
&= 2(1 + \cos\frac{2\pi}{2n+1}) \\
&= 2^2(\cos^2\frac{\pi}{2n+1}) \\
&= (2\cos\frac{\pi}{2n+1})^2
\end{aligned}$$

En (5.38)

$$1 = (2\cos\frac{\pi}{2n+1})^2\cdots(2\cos\frac{n\pi}{2n+1})^2(2\cos\frac{(n+1)\pi}{2n+1})^2\cdots(2\cos\frac{2n\pi}{2n+1})^2$$

$$1 = (2)^{2n}\cos\frac{\pi}{2n+1}\cdots\cos\frac{n\pi}{2n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{2n+1}\cdots\cos\frac{2n\pi}{2n+1} \quad (2n \text{ factores})$$

$$\cos\frac{(n+1)\pi}{2n+1} = \cos(\pi - \frac{n\pi}{2n+1}) = -\cos\frac{n\pi}{2n+1}$$
$$\cos\frac{2n\pi}{2n+1} = \cos(\pi - \frac{\pi}{2n+1}) = -\cos\frac{\pi}{2n+1}$$

$$\frac{1}{(2)^{2n}} = (-\cos^2\frac{\pi}{2n+1})(-\cos^2\frac{2\pi}{2n+1})\cdots(-\cos^2\frac{n\pi}{2n+1}) \quad (n \text{ factores})$$
$$\frac{1}{(2)^{2n}} = (-1)^n\cos^2\frac{\pi}{2n+1}\cos^2\frac{2\pi}{2n+1}\cdots\cos^2\frac{n\pi}{2n+1}$$
$$\frac{(-1)^n}{(2)^{2n}} = \cos^2\frac{\pi}{2n+1}\cos^2\frac{2\pi}{2n+1}\cdots\cos^2\frac{n\pi}{2n+1}$$

Este resultado tiene sentido si n es par entonces

$$\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cdots\cos\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n}$$

Ejercicio 5.29

Sea $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ donde

$$x = 7 + \frac{7}{2}\cos\alpha + \frac{7}{2^2}\cos 2\alpha + \cdots + \frac{7}{2^n}\cos n\alpha + \cdots$$
$$y = \frac{7}{2}\operatorname{sen}\alpha + \frac{7}{2^2}\operatorname{sen}2\alpha + \cdots + \frac{7}{2^n}\operatorname{sen}n\alpha + \cdots$$

y $\arg(z) = \alpha$ tal que $\tan\alpha = \frac{7}{24}$. Encontrar z

Solución.

$$z = x + iy = 7(1 + \frac{\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha}{2} + \frac{\cos 2\alpha + i\operatorname{sen}2\alpha}{2^2} + \cdots + \frac{\cos n\alpha + i\operatorname{sen}n\alpha}{2^n} + \cdots)$$
$$= 7(1 + \frac{e^{i\alpha}}{2} + \frac{e^{i2\alpha}}{2^2} + \cdots + \frac{e^{in\alpha}}{2^n} + \cdots)$$
$$= 7\Big(1 + (\frac{e^{i\alpha}}{2}) + (\frac{e^{i\alpha}}{2})^2 + \cdots(\frac{e^{i\alpha}}{2})^n + \cdots\Big)$$

Se tiene que

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}, \quad x \in \langle -1, 1\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= 7\Big(\frac{1}{1-\frac{e^{i\alpha}}{2}}\Big) \\
&= 7\Big(\frac{2}{2-e^{i\alpha}}\Big) \\
&= \frac{14}{2-(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)} \\
&= \frac{14}{(2-\cos\alpha) - i\,\text{sen}\,\alpha} \\
&= \Big(\frac{14}{(2-\cos\alpha) - i\,\text{sen}\,\alpha}\Big)\frac{(2-\cos\alpha) + i\,\text{sen}\,\alpha}{(2-\cos\alpha) + i\,\text{sen}\,\alpha} \\
&= \frac{14[(2-\cos\alpha) + i\,\text{sen}\,\alpha]}{(2-\cos\alpha)^2 + \text{sen}^2\,\alpha} \\
&= \frac{14(2-\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)}{4 - 4\cos\alpha + \cos^2\alpha + \text{sen}^2\,\alpha} \\
&= \frac{14(2-\cos\alpha)}{5-4\cos\alpha} + i\,\frac{14\,\text{sen}\,\alpha}{5-4\cos\alpha}
\end{aligned}$$

$\tan\alpha = \frac{7}{24}$ entonces $\text{sen}\,\alpha = \frac{7}{25}$ y $\cos\alpha = \frac{24}{25}$

$$x = \frac{14(2-\cos\alpha)}{5-4\cos\alpha} = \frac{14(2-\frac{24}{25})}{5-4(\frac{24}{25})} = \frac{14(26)}{125-96} = \frac{364}{29}$$

$$y = \frac{14\,\text{sen}\,\alpha}{5-4\cos\alpha} = \frac{14(\frac{7}{25})}{5-4(\frac{24}{25})} = \frac{14(7)}{125-96} = \frac{98}{29}$$

Ejercicio 5.30

D.q.

$$A = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{+8\pi}{7} + \cos\frac{10\pi}{7} + \cos\frac{12\pi}{7} = -1$$

$$B = \text{sen}\,\frac{2\pi}{7} + \text{sen}\,\frac{4\pi}{7} + \text{sen}\,\frac{6\pi}{7} + \text{sen}\,\frac{+8\pi}{7} + \text{sen}\,\frac{10\pi}{7} + \text{sen}\,\frac{12\pi}{7} = 0$$

Solución.

$$A + Bi = e^{i\frac{2\pi}{7}} + e^{i\frac{4\pi}{7}} + e^{i\frac{6\pi}{7}} + e^{i\frac{8\pi}{7}} + e^{i\frac{10\pi}{7}} + e^{i\frac{12\pi}{7}}$$
$$= 1 + e^{i\frac{2\pi}{7}} + (e^{i\frac{2\pi}{7}})^2 + (e^{i\frac{2\pi}{7}})^3 + (e^{i\frac{2\pi}{7}})^4 + (e^{i\frac{2\pi}{7}})^5 + (e^{i\frac{2\pi}{7}})^6 -$$

Se tiene que

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}, \quad x \neq 1$$

$$A + Bi = \frac{1-(e^{i\frac{2\pi}{7}})^7}{1-e^{i\frac{2\pi}{7}}} - 1 = \frac{1-e^{i2\pi}}{1-e^{i2\frac{\pi}{7}}} - 1 = 0 - 1 = -1$$

entonces $A = -1$ y $B = 0$

Ejercicio 5.31

Si n es un entero positivo y x^3 un ángulo que verifica la igualdad sen $\frac{x^3}{2} = \frac{\cdot}{2}$
D.q.

$$A = \cos\frac{x^3}{2} + \cos\frac{3x^3}{2} + \cos\frac{5x^3}{2} + \cdots + \cos(\frac{2n-1}{2})x^3 = n \operatorname{sen} nx^3$$

Solución.
Sea

$$B = \operatorname{sen}\frac{x^3}{2} + \operatorname{sen}\frac{3x^3}{2} + \operatorname{sen}\frac{5x^3}{2} + \cdots + \operatorname{sen}(\frac{2n-1}{2})x^3$$

$$A + iB = e^{i\frac{x^3}{2}} + e^{i\frac{3x^3}{2}} + e^{i\frac{5x^3}{2}} + \cdots + e^{i\frac{(2n-1)}{2}x^3}$$
$$= e^{i\frac{x^3}{2}} + (e^{i\frac{x^3}{2}})^3 + (e^{i\frac{x^3}{2}})^5 + \cdots + (e^{i\frac{x^3}{2}})^{2n-1}$$

Si hacemos $z = e^{i\frac{x^3}{2}}$ entonces $z^2 = e^{ix^3}$

$$A + iB = z + z^3 + z^5 + \cdots + z^{2n-1}$$
$$= z(1 + z^2 + z^4 + \cdots + z^{2n-2})$$
$$= z(1 + z^2 + (z^2)^2 + \cdots + (z^2)^{n-1})$$
$$= z(\frac{1-(z^2)^n}{1-z^2})$$

$$
\begin{aligned}
&= z\left(\frac{1-(e^{ix^3})^n}{1-e^{ix^3}}\right)\\
&= z\left(\frac{1-e^{inx^3}}{1-e^{ix^3}}\right)\\
&= z\frac{(1-\cos nx^3 - i\ \mathrm{sen}\, nx^3)}{1-\cos x^3 - i\ \mathrm{sen}\, x^3}\\
&= z\frac{2\,\mathrm{sen}^2\frac{nx^3}{2} - 2i\ \mathrm{sen}\frac{nx^3}{2}\cos\frac{nx^3}{2}}{2\,\mathrm{sen}^2\frac{x^3}{2} - 2i\ \mathrm{sen}\frac{x^3}{2}\cos\frac{x^3}{2}}\\
&= z\frac{2\,\mathrm{sen}\frac{nx^3}{2}(\mathrm{sen}\frac{nx^3}{2} - i\cos\frac{nx^3}{2})}{2\,\mathrm{sen}\frac{x^3}{2}(\mathrm{sen}\frac{x^3}{2} - i\cos\frac{x^3}{2})}\\
&= z\frac{\mathrm{sen}\frac{nx^3}{2}}{\mathrm{sen}\frac{x^3}{2}}\left(\frac{\cos(\frac{nx^3}{2}-\frac{\pi}{2}) + i\ \mathrm{sen}(\frac{nx^3}{2}-\frac{\pi}{2})}{\cos(\frac{x^3}{2}-\frac{\pi}{2}) + i\ \mathrm{sen}(\frac{x^3}{2}-\frac{\pi}{2})}\right)\\
&= z\frac{\mathrm{sen}\frac{nx^3}{2}}{\mathrm{sen}\frac{x^3}{2}}\frac{e^{i(\frac{nx^3}{2}-\frac{\pi}{2})}}{e^{i(\frac{x^3}{2}-\frac{\pi}{2})}}\\
&= z\frac{\mathrm{sen}\frac{nx^3}{2}}{\mathrm{sen}\frac{x^3}{2}}e^{i(\frac{nx^3}{2}-\frac{\pi}{2}-\frac{x^3}{2}+\frac{\pi}{2})}\\
&= e^{i\frac{x^3}{2}}\frac{\mathrm{sen}\frac{nx^3}{2}}{\mathrm{sen}\frac{x^3}{2}}e^{i\frac{(n-1)x^3}{2}}\\
&= \frac{\mathrm{sen}\frac{nx^3}{2}}{\mathrm{sen}\frac{x^3}{2}}e^{i\frac{nx^3}{2}}\\
&= \frac{\mathrm{sen}\frac{nx^3}{2}}{\mathrm{sen}\frac{x^3}{2}}(\cos\frac{nx^3}{2} + i\ \mathrm{sen}\frac{nx^3}{2})
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{\mathrm{sen}\frac{nx^3}{2}}{\mathrm{sen}\frac{x^3}{2}}\cos\frac{nx^3}{2}\\
&= \frac{\mathrm{sen}\, nx^3}{2\,\mathrm{sen}\frac{x^3}{2}}
\end{aligned}
$$

por dato $\mathrm{sen}\frac{x^3}{2} = \frac{1}{2n}$ entonces

$$A = n\,\mathrm{sen}\, nx^3$$

Ejercicio 5.32

Calcular

$$F = \cot\frac{\pi}{25}\cot\frac{2\pi}{25}\cot\frac{3\pi}{25}\cdots\cot\frac{12\pi}{25}$$

Solución.

$n = 12$ y $2n + 1 = 25$

Por el Ejercicio 5.27

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n+1}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{2n+1}\cdots\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$$

Por el Ejercicio 5.28

$$\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cdots\cos\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n}$$

Entonces

$$\cot\frac{\pi}{2n+1}\cot\frac{2\pi}{2n+1}\cdots\cot\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

Luego

$$F = \frac{1}{\sqrt{2(12)+1}} = \frac{1}{5}$$

Ejercicio 5.33

Calcular

$$E = \cos^2 a + \cos^2(a+2) + \cos^2(a+4) + \cos^2(a+6) + \cdots + \cos^2(a+2(n-1))$$

Solución.

Se sabe que $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$

$$\begin{aligned}2E &= 2\cos^2 a + 2\cos^2(a+2) + 2\cos^2(a+4) + 2\cos^2(a+6) + \cdots \\ &\quad + 2\cos^2(a+2(n-1)) \\ &= (1+\cos 2a) + (1+\cos 2(a+2)) + (1+\cos 2(a+4)) + \cdots \\ &\quad + (1+\cos 2(a+2(n-1))) \quad (n \text{ sumandos})\end{aligned}$$

$$= n + \cos 2a + \cos 2(a+2) + \cos 2(a+4) + \cdots + \cos 2(a + 2(n-1))$$

$$2E = n + P \tag{5.39}$$

$$P = \cos 2a + \cos 2(a+2) + \cos 2(a+4) + \cdots + \cos 2(a + 2(n-1))$$
$$Q = \operatorname{sen} 2a + \operatorname{sen} 2(a+2) + \operatorname{sen} 2(a+4) + \cdots + \operatorname{sen} 2(a + 2(n-1))$$

$$\begin{aligned}
P + iQ &= e^{i2a} + e^{i2(a+2)} + e^{i2(a+4)} + \cdots + e^{i2(a+2(n-1))} \\
&= e^{i2a}(1 + e^{i4} + e^{i8} + \cdots + e^{i4(n-1)}) \\
&= e^{i2a}(1 + e^{i4} + (e^{i4})^2 + \cdots + (e^{i4})^{n-1}) \\
&= e^{i2a}\frac{1 - e^{i4n}}{1 - e^{i4}} \\
&= e^{i2a}\frac{e^{i2n}(e^{-i2n} - e^{i2n})}{e^{i2}(e^{-i2} - e^{i2})} \\
&= e^{i2a}e^{i2(n-1)}\frac{(-2i \operatorname{sen} 2n)}{-2i \operatorname{sen} 2} \\
&= \frac{\operatorname{sen} 2n}{\operatorname{sen} 2}e^{i(2a+2(n-1))} \\
&= \frac{\operatorname{sen} 2n}{\operatorname{sen} 2}e^{i2(a+(n-1))}
\end{aligned}$$

$$P = \frac{\operatorname{sen} 2n}{\operatorname{sen} 2}\cos 2(a + (n-1))$$

En (5.39)

$$\begin{aligned}
E &= \frac{n}{2} + \frac{1}{2}P \\
&= \frac{n}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2n}{2 \operatorname{sen} 2}\cos 2(a + (n-1))
\end{aligned}$$

Ejercicio 5.34

Calcular la siguiente suma trigonométrica

$$A = \operatorname{sen}^2(x+a) + \operatorname{sen}^2(3x+3a) + \operatorname{sen}^2(5x+5a) + \cdots + \operatorname{sen}^2(2n-1)(x+a)$$

Solución.
Si $x + a = y$

$$
\begin{aligned}
A &= \operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen}^2 3y + \operatorname{sen}^2 5y + \cdots + \operatorname{sen}^2(2n-1)y\\
2A &= 2\operatorname{sen}^2 y + 2\operatorname{sen}^2 3y + 2\operatorname{sen}^2 5y + \cdots + 2\operatorname{sen}^2(n-1)y\\
&= (1-\cos 2y) + (1-\cos 6y) + \cdots + (1-\cos 2(2n-1)y) \quad (n \text{ sumandos})\\
2A &= n - (\cos 2y + \cos 6y + \cos 10y + \cdots + \cos 2(2n-1)y)\\
2A &= n - P
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
P &= \cos 2y + \cos 6y + \cos 10y + \cdots + \cos 2(2n-1)y\\
Q &= \operatorname{sen} 2y + \operatorname{sen} 6y + \operatorname{sen} 10y + \cdots + \operatorname{sen} 2(2n-1)y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P + iQ &= e^{i2y} + e^{i6y} + e^{i10y} + \cdots + e^{i2(2n-1)y}\\
&= e^{i2y}(1 + e^{i4y} + e^{i8y} + \cdots + e^{i(4n-4)y})\\
&= e^{i2y}(1 + e^{i4y} + (e^{i4y})^2 + \cdots + (e^{i4y})^{n-1})\\
&= e^{i2y}\left(\frac{1-(e^{i4y})^n}{1-e^{i4y}}\right)\\
&= e^{i2y}\frac{1-e^{i4ny}}{1-e^{i4y}}\\
&= e^{i2ny}\frac{e^{i2ny}(e^{-i2ny}-e^{i2ny})}{e^{i2y}(e^{-i2y}-e^{i2y})}\\
&= e^{i2ny}\frac{(-2i\operatorname{sen} 2ny)}{(-2i\operatorname{sen} 2y)}\\
&= e^{i2ny}\frac{\operatorname{sen} 2ny}{\operatorname{sen} 2y}\\
&= \frac{\operatorname{sen} 2ny}{\operatorname{sen} 2y}(\cos 2ny + i\operatorname{sen} 2ny)
\end{aligned}
$$

$$
P = \frac{\operatorname{sen} 2ny}{\operatorname{sen} 2y}\cos 2ny = \frac{\operatorname{sen} 4ny}{2\operatorname{sen} 2y}
$$

$$
2A = n - P
$$

$$A = \frac{n}{2} - \frac{P}{2}$$
$$A = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}(\frac{\operatorname{sen} 4ny}{2 \operatorname{sen} 2y})$$
$$A = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}(\frac{\operatorname{sen} 4n(x+a)}{2 \operatorname{sen} 2(x+a)})$$

Ejercicio 5.35

Calcular la siguiente suma, haciendo uso de los números complejos

$$F = \operatorname{sen} 1^\circ \cos 5^\circ + \operatorname{sen} 3^\circ \cos 7^\circ + \operatorname{sen} 5^\circ \cos 9^\circ + \cdots + \operatorname{sen} 79^\circ \cos 83^\circ$$

Solución.

$$F = \operatorname{sen} x \cos 5x + \operatorname{sen} 3x \cos 7x + \cdots + \operatorname{sen}(2n-1)x \cos(2n+3)x$$

$n = 40, x = 1^\circ$

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \qquad \cos 5x = \frac{e^{i5x} + e^{-i5x}}{2}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x \cos 5x &= \frac{1}{4i}(e^{ix} - e^{-ix})(e^{i5x} - e^{-i5x}) \\
&= \frac{1}{4i}(e^{i6x} + e^{-i4x} - e^{i4x} - e^{-i6x}) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\Big(\frac{e^{i6x} - e^{-i6x}}{2i}\Big) - \Big(\frac{e^{i4x} - e^{-i4x}}{2i}\Big)\Big) \\
&= \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 6x - \operatorname{sen} 4x)
\end{aligned}$$

Por tanto

$$2 \operatorname{sen} x \cos 5x = \operatorname{sen} 6x - \operatorname{sen} 4x$$

$$\begin{aligned}
2F &= (2 \operatorname{sen} x \cos 5x) + (2 \operatorname{sen} 3x \cos 7x) + (2 \operatorname{sen} 5x \cos 9x) + \cdots \\
&\quad + 2 \operatorname{sen}(2n-1)x \cos(2n+3)x \\
&= (\operatorname{sen} 6x - \operatorname{sen} 4x) + (\operatorname{sen} 10x - \operatorname{sen} 4x) + (\operatorname{sen} 14x - \operatorname{sen} 4x) + \cdots \\
&\quad + (\operatorname{sen}(4n+2)x - \operatorname{sen} 4x)
\end{aligned}$$

$$= \operatorname{sen} 6x + \operatorname{sen} 10x + \operatorname{sen} 14x + \cdots + \operatorname{sen}(4n+2)x - n \operatorname{sen} 4x$$

$$2F = P - n \operatorname{sen} 4x$$

donde

$$P = \operatorname{sen} 6x + \operatorname{sen} 10x + \operatorname{sen} 14x + \cdots + \operatorname{sen}(4n+2)x$$
$$Q = \cos 6x + \cos 10x + \cos 14x + \cdots + \cos(4n+2)x$$

$$\begin{aligned}
Q + iP &= e^{i6x} + e^{i10x} + e^{i14x} + \cdots + e^{i(4n+2)x} \\
&= e^{i6x}(1 + e^{i4x} + e^{i8x} + \cdots + e^{i(4n-4)x}) \\
&= e^{i6x}(1 + e^{i4x} + (e^{i4x})^2 + \cdots + (e^{i4x})^{n-1}) \\
&= e^{i6x}(\frac{1 - e^{i4nx}}{1 - e^{i4x}}) \\
&= e^{i6x} \frac{e^{i2nx(e^{-i2nx} - e^{i2nx})}}{e^{i2x}(e^{-i2x} - e^{i2x})} \\
&= e^{i(2n+4)x} \frac{(-2i \operatorname{sen} 2nx)}{-2i \operatorname{sen} 2x} \\
&= \frac{\operatorname{sen} 2nx}{\operatorname{sen} 2x} e^{i(2n+4)x}
\end{aligned}$$

$$P = \frac{\operatorname{sen} 2nx}{\operatorname{sen} 2x} \operatorname{sen}(2n+4)x \Longrightarrow P = \frac{\operatorname{sen} 80^\circ}{\operatorname{sen} 2^\circ} \operatorname{sen} 84^\circ$$

$$\begin{aligned}
2F &= P - n \operatorname{sen} 4x \\
F &= \frac{P}{2} - \frac{n}{2} \operatorname{sen} 4^\circ
\end{aligned}$$

entonces

$$F = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} 80^\circ}{\operatorname{sen} 2^\circ} \operatorname{sen} 84^\circ - 20 \operatorname{sen} 4^\circ$$

Ejercicio 5.36

Si

$$P = \cos(\frac{2\pi}{35}) + 2\cos(\frac{4\pi}{35}) + \cdots + 34\cos(\frac{68\pi}{35}) = \frac{k}{2}.$$

Calcular el valor de k

Solución.

Si $x = \frac{2\pi}{35}$ entonces

$$P = \cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \cdots + 34\cos 34x$$
$$Q = \operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen} 2x + 3\operatorname{sen} 3x + \cdots + 34\operatorname{sen} 34x$$

$$\begin{aligned}
P + iQ &= e^{ix} + 2e^{i2x} + 3e^{i3x} + \cdots + 33e^{i33x} + 34e^{i34x} \\
e^{ix}(P + iQ) &= \qquad e^{i2x} + 2e^{i3x} + \cdots + 33e^{i34x} + 34e^{i35x} \\
(1 - e^{ix})(P + iQ) &= e^{ix} + e^{i2x} + e^{i3x} + \cdots + e^{i34x} - 34e^{i35x} \\
&= e^{ix}(1 + e^{ix} + e^{i2x} + \cdots + e^{i33x}) - 34e^{i35x} \\
&= e^{ix}\Big(\frac{1 - e^{i34x}}{1 - e^{ix}}\Big) - 34e^{i2\pi} \\
&= \frac{e^{ix} - e^{i35x}}{1 - e^{ix}} - 34 \\
&= \frac{e^{ix} - 1}{1 - e^{ix}} - 34 \\
&= -35 \\
P + iQ &= \frac{-35}{1 - e^{ix}} \\
&= \frac{35}{e^{ix} - 1} \\
&= \frac{35}{e^{i\frac{x}{2}}(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}})} \\
&= \frac{35}{e^{i\frac{x}{2}}(2i\operatorname{sen}\frac{x}{2})} \\
&= \frac{-i^2(35)}{e^{i\frac{x}{2}}(2i\operatorname{sen}\frac{x}{2})}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-35ie^{-i\frac{x}{2}}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \\
&= (-35i)\frac{\cos\frac{x}{2} - i\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \\
&= (\frac{-35i}{2})(\cot\frac{x}{2} - i) \\
&= \frac{-35i}{2}\cot\frac{x}{2} - \frac{35}{2} \\
&= \frac{-35i}{2}\cot\frac{\pi}{35} - \frac{35}{2} \\
&= -\frac{35}{2} - \frac{35}{2}i\cot\frac{\pi}{35}
\end{aligned}
$$

Entonces

$$P = -\frac{35}{2} = \frac{k}{2} \Longrightarrow k = -35$$

Ejercicio 5.37

Calcular

$$A = 1 + \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{4}\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 3\theta + \cdots + \frac{1}{2^n}\cos n\theta$$

Solución.

$$A = 1 + \frac{1}{2}\cos\theta + (\frac{1}{2})^2\cos 2\theta + (\frac{1}{2})^3\cos 3\theta + \cdots + (\frac{1}{2})^n\cos n\theta$$

Si $a = \frac{1}{2}$

$$
\begin{aligned}
A &= 1 + a\cos\theta + a^2\cos 2\theta + a^3\cos 3\theta + \cdots + a^n\cos n\theta \\
B &= \quad a\operatorname{sen}\theta + a^2\operatorname{sen} 2\theta + a^3\operatorname{sen} 3\theta + \cdots + a^n\operatorname{sen} n\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A + iB &= 1 + ae^{i\theta} + a^2e^{i2\theta} + a^3e^{i3\theta} + \cdots + a^ne^{in\theta} \\
&= 1 + ae^{i\theta} + (ae^{i\theta})^2 + (ae^{i\theta})^3 + \cdots + (ae^{i\theta})^n \\
&= \frac{1 - (ae^{i\theta})^{n+1}}{1 - ae^{i\theta}}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1-a^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}{1-ae^{i\theta}}\left(\frac{1-ae^{-i\theta}}{1-ae^{-i\theta}}\right)\\
&= \frac{1-ae^{-i\theta}-a^{n+1}e^{i(n+1)\theta}+a^{n+2}e^{in\theta}}{1-ae^{-i\theta}-ae^{i\theta}+a^2}\\
&= \frac{1-ae^{-i\theta}-a^{n+1}e^{i(n+1)\theta}+a^{n+2}e^{in\theta}}{1-2a(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2})+a^2}\\
&= \frac{1-a(\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta)-a^{n+1}(\cos(n+1)\theta+i\operatorname{sen}(n+1)\theta)}{1-2a\cos\theta+a^2}\\
&\quad+\frac{a^{n+2}(\cos n\theta+i\operatorname{sen}n\theta)}{1-2a\cos\theta+a^2}\\
&= \frac{1-a\cos\theta-a^{n+1}\cos(n+1)\theta+a^{n+2}\cos n\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\\
&\quad+\frac{i(a\operatorname{sen}\theta-a^{n+1}\operatorname{sen}(n+1)\theta+a^{n+2}\operatorname{sen}n\theta)}{1-2a\cos\theta+a^2}
\end{aligned}$$

$$A=\frac{1}{1-2a\cos\theta+a^2}(1-a\cos\theta-a^{n+1}\cos(n+1)\theta+a^{n+2}\cos n\theta)$$

$a=\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1-2(\frac{1}{2})\cos\theta+\frac{1}{4}}(1-\frac{1}{2}\cos\theta-(\frac{1}{2})^{n+1}\cos(n+1)\theta+(\frac{1}{2})^{n+2}\cos n\theta)\\
A&= \frac{1}{\frac{5}{4}-\cos\theta}(1-\frac{1}{2}\cos\theta-(\frac{1}{2})^{n+1}\cos(n+1)\theta+(\frac{1}{2})^{n+2}\cos n\theta)
\end{aligned}$$

Ejercicio 5.38

Calcular la siguiente suma

$$F=\operatorname{sen}1-\operatorname{sen}(1+x)+\operatorname{sen}(1+2x)-\operatorname{sen}(1+3x)+\operatorname{sen}(1+4x)-\cdots-\operatorname{sen}(1+69x)$$

Solución.

$$\begin{aligned}
F &= \operatorname{sen}1+\operatorname{sen}(1+2x)+\operatorname{sen}(1+4x)+\cdots+\operatorname{sen}(1+68x)\\
&\quad-(\operatorname{sen}(1+x)+\operatorname{sen}(1+3x)+\operatorname{sen}(1+5x)+\cdots+\operatorname{sen}(1+69x)
\end{aligned}$$

$$P = \operatorname{sen} 1 + \operatorname{sen}(1+2x) + \operatorname{sen}(1+4x) + \cdots + \operatorname{sen}(1+2nx) \quad n = 34$$
$$Q = (\operatorname{sen}(1+x) + \operatorname{sen}(1+3x) + \operatorname{sen}(1+5x) + \cdots + \operatorname{sen}(1+(2n+1)x))$$

$$F = P - Q \tag{5.40}$$

$$P = \operatorname{sen} 1 + \operatorname{sen}(1+2x) + \operatorname{sen}(1+4x) + \cdots + \operatorname{sen}(1+2nx) \quad n = 34$$
$$R = \cos 1 + \cos(1+2x) + \cos(1+4x) + \cdots + \cos(1+2nx)$$

$$\begin{aligned}
R + iP &= e^{i1} + e^{i1}e^{i2x} + e^{i1}e^{i4x} + \cdots + e^{i1}e^{i2nx} \\
&= e^{i1}(1 + e^{i2x} + e^{i4x} + \cdots + e^{i2nx}) \\
&= e^{i1}(1 + e^{i2x} + (e^{i2x})^2 + \cdots + (e^{i2x})^n) \\
&= e^{i1}\frac{1-(e^{i2x})^{n+1}}{1-e^{i2x}} \\
&= e^{i1}\frac{e^{i(n+1)x}(e^{-i(n+1)x} - e^{i(n+1)x})}{e^{ix}(e^{-ix} - e^{ix})} \\
&= e^{i1}e^{inx}\Big(\frac{-2i\operatorname{sen}(n+1)x}{-2i\operatorname{sen} x}\Big) \\
&= e^{i(1+nx)}\Big(\frac{\operatorname{sen}(n+1)x}{\operatorname{sen} x}\Big)
\end{aligned}$$

$$P = \frac{\operatorname{sen}(n+1)x}{\operatorname{sen} x}\operatorname{sen}(1+nx),$$

para $n = 34$ entonces

$$P = \frac{35x}{\operatorname{sen} x}\operatorname{sen}(1+34x)$$

$$Q = \operatorname{sen}(1+x) + \operatorname{sen}(1+3x) + \operatorname{sen}(1+5x) + \cdots + \operatorname{sen}(1+(2n+1)x)$$
$$S = \cos(1+x) + \cos(1+3x) + \cos(1+5x) + \cdots + \cos(1+(2n+1)x)$$

$$S + iQ = e^{i(1+x)} + e^{i(1+3x)} + e^{i(1+5x)} + \cdots + e^{i(1+(2n+1)x)}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{i1}e^{ix} + e^{i1}e^{i3x} + e^{i1}e^{i5x} + \cdots + e^{i1}e^{i(2n+1)x} \\
&= e^{i1}(e^{ix} + e^{i3x} + e^{i5x} + \cdots + e^{i(2n+1)x}) \\
&= e^{i1}e^{ix}(1 + e^{i2x} + e^{i4x} + \cdots + e^{i2nx}) \\
&= e^{i1}e^{ix}(1 + e^{i2x} + (e^{i2x})^2 + \cdots + (e^{i2x})^n) \\
&= e^{i1}e^{ix}\left(\frac{1-(e^{i2x})^{n+1}}{1-e^{i2x}}\right) \\
&= e^{i1}e^{ix}\frac{e^{i(n+1)x}(e^{-i(n+1)x} - e^{i(n+1)x})}{e^{ix}(e^{-ix} - e^{ix})} \\
&= e^{i1}e^{i(n+1)x}\left(\frac{-2i\ \text{sen}(n+1)x}{-2i\ \text{sen}\, x}\right) \\
&= e^{i(1+(n+1)x)}\frac{\text{sen}(n+1)x}{\text{sen}\, x}
\end{aligned}
$$

$$Q = \frac{\text{sen}(n+1)x}{\text{sen}\, x}\,\text{sen}(1+(n+1)x),$$

para $n = 34$ entonces

$$Q = \frac{\text{sen}\, 35x}{\text{sen}\, x}\,\text{sen}(1+35x)$$

En (5.40)

$$F = P - Q = \frac{\text{sen}\, 35x}{\text{sen}\, x}(\text{sen}(1+34x) - \text{sen}(1+35x))$$

Ejercicio 5.39

Calcular

$$A = \cos(\frac{2\pi}{21}) + 2\cos(\frac{4\pi}{4}) + 3\cos(\frac{6\pi}{21}) + \cdots + 20\cos(\frac{40\pi}{21})$$

Solución.

Si $x = \frac{2\pi}{n}, n = 21$ entonces

$$e^{inx} = e^{i2\pi} = 1$$

$$A = \cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \cdots + (n-1)\cos(n-1)x$$

$$B = \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} 2x + 3 \operatorname{sen} 3x + \cdots + (n-1) sen(n-1)x$$

$$\begin{aligned}
A + iB &= e^{ix} + 2e^{i2x} + 3e^{i3x} + \cdots + (n-2)e^{i(n-2)x} \\
&\quad + (n-1)e^{i(n-1)x} \\
e^{ix}(A + iB) &= \qquad e^{i2x} + 2e^{i3x} + \cdots + (n-2)e^{i(n-1)x} + (n-1)e^{inx} \\
(1 - e^{ix})(A + Bi) &= e^{ix} + e^{i2x} + \cdots + e^{i(n-1)x} - (n-1)e^{inx} \qquad (5.41) \\
&= e^{ix}(1 + e^{ix} + e^{i2x} + \cdots + e^{i(n-2)x}) - (n-1) \\
&= e^{ix}(1 + e^{ix} + (e^{ix})^2 + \cdots + (e^{ix})^{n-2}) - (n-1) \\
&= e^{ix}\left(\frac{1 - (e^{ix})^{n-1}}{1 - e^{ix}}\right) - (n-1) \\
&= \frac{e^{ix} - e^{inx}}{1 - e^{ix}} - (n-1) \\
&= \frac{e^{ix} - 1}{1 - e^{ix}} - (n-1) \\
&= (-1) - (n-1) \\
&= -n \qquad (5.42)
\end{aligned}$$

En (5.41)

$$\begin{aligned}
(1 - e^{ix})(A + Bi) &= -n \\
A + Bi &= \frac{-n}{1 - e^{ix}} \\
&= \frac{-n}{e^{i\frac{x}{2}}(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}})} \\
&= \frac{-n}{e^{i\frac{x}{2}}(-2i \operatorname{sen} \frac{x}{2})} \\
&= \frac{ne^{-i\frac{x}{2}}}{2i \operatorname{sen} \frac{x}{2}} \\
&= \frac{n}{2i \operatorname{sen} \frac{x}{2}}(\cos \frac{x}{2} - i \operatorname{sen} \frac{x}{2}) \\
&= \frac{n}{2i} \cot \frac{x}{2} - \frac{n}{2} \\
&= \frac{ni}{-2} \cot \frac{x}{2} - \frac{n}{2}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{21}{2} - \frac{21i}{2}\cot\frac{\pi}{21}$$

$A = -\frac{21}{2}$

Ejercicio 5.40

Calcular

$$A = -i + x\operatorname{sen}\theta + x^2\operatorname{sen}2\theta + \cdots + x^n\operatorname{sen}n\theta$$

Solución.

$$\begin{aligned} A &= -i + x\operatorname{sen}\theta + x^2\operatorname{sen}2\theta + \cdots + x^n\operatorname{sen}n\theta \\ iA &= 1 + ix\operatorname{sen}\theta + ix^2\operatorname{sen}2\theta + \cdots + ix^n\operatorname{sen}n\theta \\ B &= \qquad x\cos\theta + x^2\cos 2\theta + \cdots + x^n\cos n\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B + iA &= 1 + xe^{i\theta} + x^2e^{i2\theta} + x^3e^{i3\theta} + \cdots + x^ne^{in\theta} \\ &= 1 + xe^{i\theta} + (xe^{i\theta})^2 + (xe^{i\theta})^3 + \cdots + (xe^{i\theta})^n \\ &= \frac{1-(xe^{i\theta})^{n+1}}{1-xe^{i\theta}} \\ &= \frac{1-x^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}{1-xe^{i\theta}}\left(\frac{1-xe^{-i\theta}}{1-xe^{-i\theta}}\right) \\ &= \frac{1-xe^{-i\theta}-x^{n+1}e^{i(n+1)\theta}+x^{n+2}e^{in\theta}}{1-xe^{-i\theta}-xe^{i\theta}+x^2} \\ &= \frac{1-x(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)-x^{n+1}(\cos(n+1)\theta + i\operatorname{sen}(n+1)\theta)}{1-2x\cos\theta+x^2} \\ &\quad + \frac{x^{n+2}(\cos n\theta + i\operatorname{sen}n\theta)}{1-2x\cos\theta+x^2} \\ A &= \frac{1}{1-2x\cos\theta+x^2}(x\operatorname{sen}\theta - x^{n+1}\operatorname{sen}(n+1)\theta + x^{n+2}\operatorname{sen}n\theta) \end{aligned}$$

Ejercicio 5.41

Calcular

$$P=\left(\cot\frac{\pi}{2n}+\tan\frac{\pi}{2n}\right)\left(\cot\frac{\pi}{n}+\tan\frac{\pi}{n}\right)\cdots\left(\cot\frac{(n-1)\pi}{2n}+\tan\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)$$

Solución.

$$\begin{aligned}\cot x+\tan x&=\frac{1}{\tan x}+\tan x\\&=\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}\\&=\frac{\sec^2 x}{\tan x}\\&=\frac{1}{\cos^2 x\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}\\&=\frac{1}{\operatorname{sen} x\cos x}\\&=\frac{2}{\operatorname{sen} 2x}\\&=2\csc 2x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P&=\left(2\csc\frac{2\pi}{2n}\right)\left(2\csc\frac{4\pi}{2n}\right)\left(2\csc\frac{6\pi}{2n}\right)\cdots\left(2\csc\frac{2(n-1)\pi}{2n}\right)\quad(n-1\text{ factores})\\&=2^{n-1}\left(\csc\frac{\pi}{n}\right)\left(\csc\frac{2\pi}{n}\right)\left(\csc\frac{3\pi}{n}\right)\cdots\left(\csc\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\\&=2^{n-1}\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{n}\cdots\operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{n}},\quad P=\frac{2^{n-1}}{Q}\qquad(5.43)\end{aligned}$$

$$Q=\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{n}\cdots\operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{n},\quad n\geq 2$$

Se demostró que $Q=\frac{n}{2^{n-1}}$, $\forall n\geq 2$ (Ejercicio 5.25 Sección 5.14).

En (5.43)

$$P=2^{n-1}\frac{1}{Q}=2^{n-1}\frac{2^{n-1}}{n}=\frac{2^{2(n-1)}}{n}$$

Ejercicio 5.42

Calcular

$$A = \cos^2\frac{\pi}{25} + 2\cos^2\frac{2\pi}{25} + 3\cos^2\frac{3\pi}{25} + \cdots + 24\cos^2\frac{24\pi}{25}$$
$$- \left(\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{25} + 2\operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{25} + 3\operatorname{sen}^2\frac{3\pi}{25} + \cdots + 24\operatorname{sen}^2\frac{24\pi}{25}\right)$$

Solución.

$$A = \left(\cos^2\frac{\pi}{25} - \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{25}\right) + 2\left(\cos^2\frac{2\pi}{25} - \operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{25}\right) + 3\left(\cos^2\frac{3\pi}{25} - \operatorname{sen}^2\frac{3\pi}{25}\right)$$
$$+ \cdots + 24\left(\cos^2\frac{24\pi}{25} - \operatorname{sen}^2\frac{24\pi}{25}\right)$$
$$A = \cos\frac{2\pi}{25} + 2\cos\frac{4\pi}{25} + 3\cos\frac{6\pi}{25} + \cdots + 24\cos\frac{48\pi}{25}$$

$$B = 24\cos\frac{48\pi}{25} + 23\cos\frac{46\pi}{25} + 22\cos\frac{44\pi}{25} + \cdots + \cos\frac{2\pi}{25}, \quad A = B$$

$$\cos\frac{48\pi}{25} = \cos(2\pi - \frac{2\pi}{25}) = \cos\frac{2\pi}{25}$$
$$\cos\frac{46\pi}{25} = \cos(2\pi - \frac{4\pi}{25}) = \cos\frac{4\pi}{25}$$

$$B = 24\cos\frac{2\pi}{25} + 23\cos\frac{4\pi}{25} + 22\cos\frac{6\pi}{25} + \cdots + \cos\frac{2\pi}{25}$$
$$A + B = 25\cos\frac{2\pi}{25} + 25\cos\frac{4\pi}{25} + 25\cos\frac{6\pi}{25} + \cdots + 25\cos\frac{48\pi}{25}$$
$$\frac{2A}{25} = \cos\frac{2\pi}{25} + \cos\frac{4\pi}{25} + \cos\frac{6\pi}{25} + \cdots + \cos\frac{48\pi}{25}$$

Si $x = \frac{2\pi}{25}$

$$F = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots + \cos 24x$$
$$G = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x + \cdots +' sen24x$$
$$F + iG = e^{ix} + e^{i2x} + e^{i3x} + \cdots + e^{i24x}, \quad n = 24$$
$$= \frac{\operatorname{sen} 12x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} e^{i25\frac{x}{2}} \quad \text{(Por el Ejemplo 5.35 Sección 5.13)}$$

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{\operatorname{sen} 12x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}(\cos\frac{25x}{2})\\
&= \frac{\operatorname{sen}\frac{24\pi}{25}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{25}}\cos\pi\\
&= -\frac{\operatorname{sen}(\pi-\frac{\pi}{25})}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{25}}\\
&= -\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{25}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{25}}\\
&= -1
\end{aligned}
$$

$$A = \frac{25}{2}F = -\frac{25}{2}$$

5.15 Ejercicios propuestos

1) Calcular la suma de $1 + 4w + 9w^2 + \cdots + n^2w^{n-1}$ donde w es la n-ésima raíz de la unidad.

2) Encontrar la suma de todas las raíces de n-ésimo orden del siguiente número complejo

$$\frac{1}{2i^{n-1}}\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{n-2}, \; n \in \mathbb{Z}^+$$

3) Calcular

$$E = \operatorname{sen}\frac{\pi}{8}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{8}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{8}\cdots\operatorname{sen}\frac{7\pi}{8}$$

usando números complejos.

Rpta: $E = \frac{1}{16}$

4) Hallar la suma

$$A = \cos^3 x + \cos^3 2x + \cos^3 3x + \cdots + \cos^3 nx$$

5) D.q. $\cot\frac{\pi}{2n}\cot\frac{2\pi}{2n}\cot\frac{3\pi}{2n}\cdots\cot\frac{(n-1)\pi}{2n} = 1$

6) Calcular $A = \tan(\frac{\pi}{2n+1})\tan(\frac{2\pi}{2n+1})\tan(\frac{3\pi}{2n+1})\cdots\tan(\frac{n\pi}{2n+1})$

7) Calcular $E = \cos(\frac{\pi}{2n+1})\cos(\frac{2\pi}{2n+1})\cdots\cos(\frac{n\pi}{2n+1})$

Rpta: $E = \frac{2n+1}{2^{2n}}$

8) Si $m \in \mathbb{Z}^+$. Calcular

$$E = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2m+1}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{2m+1}\cdots\operatorname{sen}\frac{m\pi}{2m+1}$$

9) Usando números complejos. Calcular

$$A = \operatorname{sen}\frac{\pi}{31}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{31}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{31}\cdots\operatorname{sen}\frac{15\pi}{31}$$

Rpta: $A = \frac{\sqrt{31}}{2^{15}}$

10) Hallar la siguiente suma

$$E = \cos^3(\frac{2\pi}{7}) + \cos^3(\frac{4\pi}{7}) + \cos^3(\frac{6\pi}{7}) + \cdots + \cos^3(\frac{2n\pi}{7})$$

11) Calcular

$$F = \operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen}^3(2x) + + \operatorname{sen}^3(3x) + \cdots + \operatorname{sen}^3(nx)$$

Rpta: $F = \frac{3}{4}\frac{\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\operatorname{sen}(n+1)\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\frac{\operatorname{sen}\frac{3nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{3x}{2}}\operatorname{sen}\frac{3(n+1)x}{2}$

12) Calcular

$$A = \operatorname{sen}\frac{\pi}{n} + 2\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + 3\operatorname{sen}\frac{3\pi}{n} + \cdots + n\operatorname{sen}\frac{n\pi}{n}$$

13) Calcular

$$B = \sec\frac{\pi}{2n}\sec\frac{2\pi}{2n}\sec\frac{3\pi}{2n}\cdots\sec\frac{(n-1)\pi}{2n}$$

Rpta: $B = \frac{2^{n-1}}{\sqrt{n}}$

14) D.q. si $n \in \mathbb{Z}^+$ y x es un ángulo que satisface la condición $\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \frac{1}{2n}$. Entonces

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \operatorname{sen}\frac{3x}{2} + \operatorname{sen}\frac{5x}{2} + \cdots + \operatorname{sen}(\frac{2n-1}{2})x = n(1-\cos nx)$$

15) Calcular

$$A = \operatorname{sen}^2 1^\circ + \operatorname{sen}^2 3^\circ + \operatorname{sen}^2 5^\circ + \cdots + \operatorname{sen}^2 159^\circ$$

Rpta: $A = 40 - \frac{1}{4}\frac{\operatorname{sen} 320^\circ}{\operatorname{sen} 2^\circ}$

16) Calcular

$$F = \csc\frac{\pi}{2n+1}\csc\frac{2\pi}{2n+1}\csc\frac{3\pi}{2n+1}\cdots\csc\frac{n\pi}{2n+1}\csc\frac{(n+1)\pi}{2n+1}$$

17) Calcular

$$E = \left(\csc\frac{\pi}{n} - \cot\frac{\pi}{n}\right)\left(\csc\frac{2\pi}{n} - \cot\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\left(\csc\frac{(n-1)\pi}{n} - \cot\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

Rpta: $E = 1$

18) Calcular

$$A = \cos^2\frac{\pi}{n} + \cos^2\frac{3\pi}{n} + \cos^2\frac{5\pi}{n} + \cdots + \cos^2\frac{(2n-1)\pi}{n} \qquad n > 2$$

19) Calcular

$$A = \prod_{k=1}^{n}\left(\tan\frac{k\pi}{2(2n+1)} + \cot\frac{k\pi}{2(2n+1)}\right)$$

Rpta: $A = \frac{(2^n)^2}{\sqrt{2n+1}}$

20) Calcular

$$M = \Big(\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{sen}^2(a+kr)\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n-1}\cos^2(a+kr)\Big)$$

21) Calcular la siguiente suma

$$E = \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{26} + \operatorname{sen}^2\frac{3\pi}{26} + \operatorname{sen}^2\frac{5\pi}{26} + \cdots + \operatorname{sen}^2\frac{51\pi}{26}$$

Rpta: $E = 13$

22) Calcular

$$A = \operatorname{sen}\frac{2\pi}{21} + 2\operatorname{sen}\frac{4\pi}{21} + 3\operatorname{sen}\frac{6\pi}{21} + \cdots + 20\operatorname{sen}\frac{40\pi}{21}$$

23) Calcular

$$A = \cos^2(\frac{\pi}{38}) + \cos^2(\frac{2\pi}{38}) + \cos^2(\frac{3\pi}{38}) + \cdots + \cos^2(\frac{18\pi}{38})$$

Rpta: $A = 9$

24) Demostrar que

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + 2\operatorname{sen}\frac{4\pi}{n} + \cdots + (n-1)\operatorname{sen}\frac{2(n-1)\pi}{n} = -\frac{n}{2}\cot\frac{\pi}{n},\ n \geq 2$$

25) Haciendo uso de los números complejos. Calcular

$$E = \left(\cot\frac{\pi}{4m+2} - \tan\frac{\pi}{4m+2}\right)\left(\cot\frac{2\pi}{4m+2} - \tan\frac{2\pi}{4m+2}\right)$$
$$\left(\cot\frac{3\pi}{4m+2} - \tan\frac{3\pi}{4m+2}\right)\cdots\left(\cot\frac{m\pi}{4m+2} - \tan\frac{m\pi}{4m+2}\right)$$

Rpta: $E = \frac{2^m}{\sqrt{2m+1}}$

26) Calcular la suma

$$E = \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{n} + \operatorname{sen}^2\frac{3\pi}{n} + \operatorname{sen}^2\frac{5\pi}{n} + \cdots + \operatorname{sen}^2\frac{(2n-1)\pi}{n}$$

27) Sea

$$E = \operatorname{sen}\frac{\theta}{4} + \operatorname{sen}\frac{3\theta}{4} + \operatorname{sen}\frac{5\theta}{4} + \cdots + \operatorname{sen}(2n-1)\frac{\theta}{4}$$

Hallar $|z|$, si $z = n - E + in\operatorname{sen}\frac{n\theta}{2}$ sabiendo que $\operatorname{sen}\frac{\theta}{4} = \frac{1}{2n}$.

Rpta: $|z| = n$

28) Sea x^3 un ángulo que verifica $\operatorname{sen}^3 = \frac{1}{2n}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. Calcular

$$A = \cos^2\frac{x^3}{2} + \cos^2\frac{3x^3}{2} + \cos^2\frac{5x^3}{2} + \cdots + \cos^2\frac{29x^3}{2}$$

29) Calcular

$$A = \operatorname{sen}^4 1^\circ + \operatorname{sen}^4 3^\circ + \operatorname{sen}^4 5^\circ + \cdots + \operatorname{sen}^4 29^\circ$$

Rpta: $A = \frac{\sqrt{3}}{32 \operatorname{sen} 4^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{8 \operatorname{sen} 2^\circ} + \frac{45}{8}$

30) Calcular

$$A = \cos\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right)\cdots\cos\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right)$$

31) Hallar

$$B = \prod_{t=1}^{n}\left(\frac{2}{1-\cos(\frac{2t\pi}{2n+1})} - 1\right) \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

Rpta: $B = \frac{1}{(-1)^n(2n+1)}$

32) Hallar

$$P = \prod_{k=0}^{2004}(1 + z_k^2)$$

si $z_k = e^{i(\frac{2k\pi}{2005})}$ donde $k = 0, 1, 2, \ldots, 2004$

33) Si $1 - C_2^n + C_4^n - C_6^n + \cdots = 2^m \cos\theta$ donde $C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!}$. Calcular $m\theta$

Rpta: $m\theta = \frac{n}{2}n\frac{\pi}{4} = \frac{n^2\pi}{8}$

34) Calcular la siguiente suma

$$A = 1 + 2\cos\frac{\pi}{15} + 2^2\cos\frac{2\pi}{15} + 2^3\cos\frac{3\pi}{15} + \cdots + 2^{45}\cos\frac{45\pi}{15}$$

35) Calcular

$$E = 1 + 2\cos\theta + 3\cos 2\theta + \cdots + n\cos(n-1)\theta$$

Rpta: $E = \frac{n \operatorname{sen}(2n-1)\frac{\theta}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} - \frac{\operatorname{sen} n\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}(n-2)\frac{\theta}{2}}{2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}$

36) Calcular

$$E = \prod_{k=1}^{n}(5 - 4\cos\frac{2k\pi}{2n+1}) + \prod_{k=1}^{n}(5 + 4\cos\frac{2k\pi}{2n+1})$$

37) Calcular

(a) $A = \cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{3\pi}{2n+1}\cdots\cos\frac{n\pi}{2n+1}$

Rpta: $A = \frac{(-1)^n}{2^n}$

(b) si $n = 7$ qué valor toma A?

Rpta: $A = -\frac{1}{128}$

38) Calcular la siguiente suma

$$A = \cos^3(\frac{3^\circ}{2}) + \cos^3(\frac{9^\circ}{2}) + \cos^3(\frac{15^\circ}{2}) + \cdots + \cos^3(\frac{177^\circ}{2})$$

39) Calcular el siguiente producto

$$E = \operatorname{sen} 1^\circ \operatorname{sen} 2^\circ(\operatorname{sen}^2 2^\circ - \operatorname{sen}^2 1^\circ)(\operatorname{sen}^2 3^\circ - \operatorname{sen}^2 1^\circ)\cdots$$
$$(\operatorname{sen}^2 45^\circ - \operatorname{sen}^2 1^\circ)\cdots(\operatorname{sen}^2 89^\circ - \operatorname{sen}^2 1^\circ)$$

Rpta: $E = \frac{1}{\operatorname{sen} 89^\circ}\frac{180}{2^{179}}$

40) Usando el sistema de los números complejos, calcular

$$A = \sum_{k=-n}^{n} e^{-i3k}$$

41) Calcular

$$A = \cos^2\frac{2\pi}{35} + \cos^2\frac{4\pi}{35} + \cos^2\frac{6\pi}{35} + \cdots + \cos^2\frac{68\pi}{35}$$

Rpta: $A = \frac{33}{2}$

42) Calcular

$$A = \Big(\frac{\tan(\frac{1}{2})^\circ}{1+\tan^2(\frac{1}{2})^\circ}\Big)\Big(\frac{\tan 1^\circ}{1+\tan^2 1^\circ}\Big)\Big(\frac{\tan(\frac{3}{2})^\circ}{1+\tan^2(\frac{3}{2})^\circ}\Big)\Big(\frac{\tan 2^\circ}{1+\tan^2 2^\circ}\Big)\cdots$$
$$\Big(\frac{\tan(\frac{77}{2})^\circ}{1+\tan^2(\frac{77}{2})^\circ}\Big)\Big(\frac{\tan 39^\circ}{1+\tan^2 39^\circ}\Big)$$

43) Calcular AB si

$$\begin{vmatrix} 1+e^{i2\theta} & e^{i\theta} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ e^{i\theta} & 1+e^{i2\theta} & e^{i\theta} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} & 1+e^{i2\theta} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+e^{i2\theta} & e^{i\theta} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{i\theta} & 1+e^{i2\theta} \end{vmatrix}_n = Ae^{iB\theta}$$

Rpta: $A = \frac{\operatorname{sen}(n+1)\theta}{\operatorname{sen}\theta}, \quad B = n$

44) Calcule

$$E = \operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{n+1}) + \operatorname{sen}^2(\frac{2\pi}{n+1}) + \operatorname{sen}^2(\frac{3\pi}{n+1}) + \cdots + \operatorname{sen}^2(\frac{n\pi}{n+1})$$

5.16 Polinomios y ecuaciones polinomiales

Ahora estamos en condiciones de afrontar el problema de resolver ecuaciones polinomiales tema que posteriormente tendrá aplicación.

Definición 5.24

Sea $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ se llama **función polinomial** o **polinomio real de variable real.**

Definición 5.25

Sea $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ se llama **función polinomial** o **polinomio complejo de variable compleja**

Definición 5.26

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ con $a_n \neq 0$ se llama **función polinomial o polinomio de grado** n donde:

$n \geq 0$	: es un número entero
x	: es la **variable independiente** que puede ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$
a_i	: son los **coeficientes** del polinomio y son constantes que pueden ser números enteros, racionales o complejos.
a_n	: es el **coeficiente principal**
a_0	: es el **término constante**

Nota

El nombre particular del polinomio $P(x)$ dependerá de la variable independiente x y de los coeficientes a_i

1) Si $x \in \mathbb{R}$ y los coeficientes $a_i \in \mathbb{Z}$ entonces $P(x)$ es un polinomio real con coeficientes enteros.

2) Si $x \in \mathbb{C}$ y los coeficientes $a_i \in \mathbb{C}$ entonces $P(x)$ es un polinomio complejo con coeficientes complejos.

Observación.

1) Si $a_n \neq 0, n \geq 1$ entonces $P(x)$ es un **polinomio de grado** n y se denota por $P_n(x)$.

2) Si $a_n \neq 0$ y $n = 0$ entonces $P(x) = a_0 x^0 = a_0 \neq 0$ entonces $P(x)$ es un **polinomio de grado cero** ($P(x)$ es una función constante diferente de cero)

3) Si $a_n = 0$ y $n = 0$ entonces $P(x) = a_0 x^0 = a_0 = 0$ entonces $P(x)$ **no tiene grado** ($P(x)$ es una función constante igual a cero)

4) Si $P(x) = a_1 x + a_0, a_1 \neq 0$ polinomio de grado 1

5) Si $P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0, a_2 \neq 0$ polinomio de grado 2

Definición 5.27

Un número r se dice que es un **cero de** $P(x)$ o una **raíz de la ecuación** $P(x) = 0$ si y sólo si $P(r) = 0$

Ejemplo 5.42

Si $P(x) = ax + b, a \neq 0$ entonces

$$P(x) = 0 \Longleftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$P(-\frac{b}{a}) = a(-\frac{b}{a}) + b = 0 \Longrightarrow -\frac{b}{a} \text{ es un cero de } P(x)$$

Ejemplo 5.43

Si $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / P(x) = ax^2 + bx + c; a \neq 0$

$$P(x) = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a} - c = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Si $b^2 - 4ac > 0$ entonces r_1 y r_2 son ceros reales diferentes de $P(x)$
- Si $b^2 - 4ac = 0$ entonces $r_1 = r_2$ dos ceros reales e iguales de $P(x)$
- Si $b^2 - 4ac < 0$ entonces $P(x)$ no tiene ceros reales

Nota

Es conveniente tener soluciones para todas las ecuaciones cuadráticas. Esto será posible si extendemos el dominio de definición de $P(x)$ al campo de los números complejos. Es decir si $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $b^2 - 4ac < 0$ entonces los ceros de $P(x)$ son números complejos.

Teorema 5.12: Teorema Fundamental del Álgebra

Todo polinomio de grado positivo sobre el campo de los números complejos tiene un cero.

Nota

1) Este teorema se debe a Gauss[3] cuya validez la admitimos sin demostración.

2) Si $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C} / P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$ es un polinomio de grado n entonces se puede afirmar que $P_n(x)$ tiene exactamente n ceros.

3) Si podemos encontrar un factor lineal $(x - r)$ de un polinomio $P(x)$ de grado n entonces

$$P(x) = (x - r)Q(x)$$

donde $Q(x)$ es un polinomio de grado $n - 1$. El número r es un cero de $P(x)$ puesto que

$$P(r) = (r - r)Q(r) = 0$$

De este modo, el problema de encontrar los ceros de un polinomio está relacionado con el problema de dividir polinomios

$$P = DQ + R$$

donde
P: dividendo, D: divisor, Q: cociente, R: residuo

Teorema 5.13: Algoritmo de la división

Si $P(x)$ es un polinomio de grado n y $D(x) \neq 0$ es un polinomio de grado m $(m < n)$ entonces existen polinomios únicos $Q(x)$ de grado $n - m$ y $R(x)$ de grado $\leq m - 1$ tales que

$$P_n(x) = D_m(x)Q_{n-m}(x) + R_{\leq m-1}(x)$$

Ejemplo 5.44

Si $P(x) = 8x^5 - 12x^4 + 14x^3 - 13x^2 - 1$ y $D(x) = 2x^2 - 3x + 4$. Encontrar el cociente $Q(x)$ y el resto $R(x)$ de dividir $P(x)$ por $D(x)$.

[3] Karl Fiedrich Gauss, matemático alemán (1777–1855)

Solución.
Utilizando división de polinomios se obtiene

$$Q(x) = 4x^3 - x - 8 \text{ y } R(x) = -20x + 31$$

tal que

$$P(x) = (2x^2 - 3x + 4)(4x^3 - x - 8) + (-20x + 31)$$

es decir

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x)$$

Ejemplo 5.45

Si $P(x) = 3x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 5$ y $D(x) = 2x^2 - x + 3$. Encontrar el cociente $Q(x)$ y el resto $R(x)$ de dividir $P(x)$ por $D(x)$

Solución.
Utilizando división de polinomios obtenemos

$$Q(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{4}x - \frac{21}{8} \text{ y } R(x) = \frac{45}{8}x + \frac{23}{8}$$

tal que

$$P(x) = (2x^2 - x + 3)(\frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{4}x - \frac{21}{8}) + (\frac{45}{8}x + \frac{23}{8})$$

es decir

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x)$$

Ejemplo 5.46

Si $P(x) = 2x^4 + 7x^3 - 4x^2 - 12x + 2$ y $D(x) = 2x + 7$. Encontrar el cociente $Q(x)$ y el resto $R(x)$ de dividir $P(x)$ por $D(x)$

Solución.
Utilizando división de polinomios se obtiene

$$Q(x) = x^3 - 2x + 1 \text{ y } R(x) = -5$$

tal que

$$P(x) = (2x - 7)(x^3 - 2x + 1) - 5$$

es decir

$$P(x) = D(x)Q(x) + R$$

Nota

1) En el ejemplo anterior se observa que si $D(x)$ tiene grado 1, entonces el resto o residuo es una constante y se denota por R.

2) Si $P(x) = (x - r)Q(x) + R$, es decir si $P(x)$ se divide por $(x - r)$, entonces el resto $R = k \neq 0$ es una constante diferente de cero (grado cero) o $R = 0$ (no tiene grado).

Definición 5.28

Se dice que un polinomio $D(x)$ **divide** a un polinomio $P(x)$ ó que $P(x)$ es **divisible** por $D(x)$ si $P(x) = D(x)Q(x)$

Ejemplo 5.47

Si $P(x) = 4x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 35x - 25$ y $D(x) = 2x^2 + 4x - 5$. Encontrar el cociente $Q(x)$ y el resto $R(x)$ de dividir $P(x)$ por $D(x)$.

Solución.

Utilizando división de polinomios $Q(x) = 2x^2 - 3x + 5$ y $R(x) = 0$ luego

$$P(x) = (2x^2 + 4x - 5)(2x^2 - 3x + 5) = D(x)Q(x)$$

Por tanto $P(x)$ es divisible por $D(x)$ o $D(x)$ divide a $P(x)$.

Teorema 5.14: Teorema del residuo

Cuando un polinomio $P(x)$ se divide por $(x - r)$ el resto o residuo es $P(r)$

Demostración. Sea $P(x) = D(x)Q(x) + R(x)$, si $D(x) = x - r$ entonces

$$P(x) = (x - r)Q(x) + R$$

luego

$$P(r) = (r - r)Q(r) + R$$

entonces $P(r) = R$ ◇

Ejemplo 5.48

$$P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 2x - 22$$
$$P(x) = (x - 2)(2x^2 + 9x + 16) + R$$

Luego

$$\begin{aligned} P(2) &= 2(2)^3 + 5(2)^2 - 2(2) - 22 \\ &= 16 + 20 - 4 - 22 \\ &= 10 = R \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$P(x) = (x - 2)(2x^2 + 9x + 12) + 10$$

Teorema 5.15: Teorema del factor

Un polinomio $P(x)$ es divisible por $(x - r)$ si y sólo si r es un cero de $P(x)$

Demostración. $\Rightarrow$) Si $P(x)$ es divisible por $(x - r)$:

$$P(x) = (x - r)Q(x),$$
$$P(r) = (r - r)Q(r) = 0$$

entonces r es un cero de $P(x)$.
$\Leftarrow$) Sabemos que

$$P(x) = (x - r)Q(x) + R$$

Si $P(r) = 0$ entonces por Teorema del resto $R = 0$ entonces

$$P(x) = (x - r)Q(x)$$

luego $P(x)$ es divisible por $(x - r)$. ◇

Definición 5.29

Se dice que r es un **cero de multiplicidad** k de un polinomio $P(x)$, si $P(x)$ es divisible por $(x-r)^k$ y no es divisible por $(x-r)^{k+1}$.

Ejemplo 5.49

$$P(x) = (x+1)(x-2)^3(x+5)^2$$

- $r = 2$ es un cero de multiplicidad 3 de $P(x)$.
- $r = -5$ es un cero de multiplicidad 2 de $P(x)$.

Teorema 5.16

Un número r es un cero de multiplicidad k de $P(x)$ si y sólo si

$$P(r) = P'(r) = \cdots = P^{(k-1)}(r) = 0$$

y $P^{(k)} \neq 0$ donde $P^{(i)}(r)$ es la i-ésima derivada de $P(x)$ evaluada en r.

Demostración. Ensayamos la demostración para $k = 2$. Es decir, r es un cero de multiplicidad 2 de $P(x)$ si y solo si $P(r) = P'(r) = 0$ y $P''(r) \neq 0$.
Si r es un cero de multiplicidad 2 de $P(x)$ entonces por definición

$$\begin{aligned}
P(x) &= (x-r)^2 Q(x) \text{ donde } Q(r) \neq 0 \\
P(r) &= (r-r)^2 Q(r) = 0 \\
P'(x) &= 2(x-r)Q(x) + (x-r)^2 Q'(x) \text{ y} \\
P'(r) &= 2(r-r)Q(r) + (r-r)^2 Q'(r) = 0 \\
P''(x) &= 2Q(x) + 2(x-r)Q'(x) + 2(x-r)Q'(x) + (x-r)^2 Q''(x) \\
P''(r) &= 2Q(r) \neq 0
\end{aligned}$$

Si $P''(r) \neq 0$, entonces r es un cero de multiplicidad 2 de $P(x)$.
En general, $P^{(k)}(x) = k!Q(x) + (2k-1)$ sumandos con factores $x - r$, entonces

$$P^{(k)}(r) = k!Q(r) \neq 0$$

◇

Ejemplo 5.50

Si $P(x) = (n-2m)x^n - nx^{n-m} + nx^m - (n-2m)$ y $r = 1$ es un cero de $P(x)$, averiguar la multiplicidad de $r = 1$.

Solución.

$$P(1) = (n-2m)1^n - n(1)^{n-m} + n(1)^m - (n-2m) = 0$$

$$\begin{aligned}
P'(x) &= n(n-2m)x^{n-1} - n(n-m)x^{n-m-1} + nmx^{m-1} \text{ y} \\
P'(1) &= 0 \\
P''(x) &= n(n-1)(n-2m)x^{n-2} - n(n-m)(n-m-1)x^{n-m-2} \\
&\quad + nm(m-1)x^{m-2} \\
P''(1) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P^{(3)}(x) &= n(n-1)(n-2m)(n-2)x^{n-3} \\
&\quad - n(n-m)(n-m-1)(n-m-2)x^{n-m-3} \\
&\quad + nm(m-1)(m-2)x^{m-3} \\
P^{(3)}(1) &\neq 0
\end{aligned}$$

entonces $r = 1$ es un cero de multiplicidad 3 de $P(x)$.

Teorema 5.17

Si un polinomio $P(x)$ sobre el campo de los números complejos tiene grado $n > 0$, entonces $P(x)$ tiene exactamente n ceros.

Es decir, si

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \ a_n \neq 0$$

entonces $P(x)$ tiene exactamente n ceros $r_1, r_2, \ldots, r_n$ que pueden ser distintos c no tal que

$$P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$$

Teorema 5.18

Si un polinomio $P(x)$ con coeficientes reales tiene como cero a $r \in \mathbb{C}$ entonces $P(x)$ también tiene como cero a $\bar{r}$.

Demostración. Sea

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$.

Si r es un cero de $P(x)$ entonces

$$P(r) = \sum_{i=0}^{n} a_i r^i = 0$$

$$\overline{P(r)} = \overline{\sum_{i=1}^{n} a_i r^i} = \bar{0} = 0$$

$$\overline{P(r)} = \overline{\sum_{i=1}^{n} a_i r^i} = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i r^i} = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i}\,\overline{(r^i)}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i (\bar{r})^i = P(\bar{r}) = 0$$

Luego $\overline{P(r)} = P(\bar{r}) = 0$ entonces $\bar{r}$ es un cero de $P(x)$. ◇

Ejemplo 5.51

Si $P(x) = 4x^2 - 5x + 7$. Encontrar los ceros de $P(x)$.

Solución.

$$P(x) = 4x^2 - 5x + 7 = 0$$

Completando cuadrados

$$4\left(x - \frac{5}{2(4)}\right)^2 = \frac{25}{16} - 7$$

$$\left(x-\frac{5}{8}\right)^2=-\frac{87}{16(4)}$$
$$x=\frac{5}{8}\pm\frac{\sqrt{87}}{8}i$$

$$r_1=\frac{5}{8}+i\frac{\sqrt{87}}{8} \qquad r_2=\frac{5}{8}-i\frac{\sqrt{87}}{8} \quad \text{(raíces conjugadas)}$$
$$P(x)=(x-r_1)(x-r_2)$$

Nota

Una consecuencia importante de este teorema es: Si $P(x)$ es un polinomio de grado impar entonces $P(x)$ tiene al menos un cero real.

Ejemplo 5.52

Demostrar que $P(x)=x^{3m}+x^{3m+1}+x^{3p+2}$ es divisible por $D(x)=x^2+x+1$ donde $m,n,p\in\mathbb{Z}^+$.

Solución.

Bastará probar que un cero de $D(x)$ es también un cero de $P(x)$.
Si r es un cero de $D(x)$ entonces

$$D(r)=r^2+r+1=0$$

entonces $\frac{r^3-1}{r-1}=0$ entonces

$$r^3=1 \text{ y } r\neq 1$$

luego

$$\begin{aligned}
P(r)&=r^{3m}+r^{3m+1}+r^{3p+2}\\
&=(r^3)^m+(r^3)^m r+(r^3)^p r^2\\
&=1^m+1^m r+1^p r^2\\
&=1+r+r^2\\
&=0
\end{aligned}$$

entonces r es un cero de $P(x)$.

Ejemplo 5.53

Si $P(x) = x^{3m} - x^{3n+1} + x^{3p+2}$. Para qué valores de m, n y p, $P(x)$ es divisible por $D(x) = x^2 - x + 1$

Solución.

Si r es un cero de $D(x)$, entonces

$$D(r) = r^2 - r + 1 = 0$$

entonces $\frac{r^3+1}{r+1} = 0$, entonces

$$r^3 = -1 \text{ y } r \neq -1$$

Luego

$$\begin{aligned} P(r) &= r^{3m} - r^{3n+1} + r^{3p+2} \\ &= (r^3)^m - (r^3)^n r + (r^3)^p r^2 \\ &= (-1)^m - (-1)^n r + (-1)^p r^2 \end{aligned}$$

- Si m, n, p son pares, entonces

$$P(r) = 1 - r + r^2 = 0$$

entonces r es cero de $P(x)$

- Si m, n, p son impares entonces

$$P(r) = -1 + r - r^2 = 0$$
$$P(r) = -(1 - r + r^2) = 0$$

entonces r es un cero de $P(x)$.

Entonces $P(x)$ es divisible por $D(x)$ cuando m, n y p son simultáneamente pares o impares.

Ejemplo 5.54

Para qué valores de m, $P(x) = x^{2m} + x^m + 1$ es divisible por $D(x) = x^2 + x + 1$.

Solución.
Sea $P(x) = D(x)Q(x) + R(x)$ (Por el algoritmo de la división)
Si $P(x)$ es divisible por $D(x)$ entonces $P(x) = D(x)Q(x)$ $(R(x) = 0)$.
Si r es un cero de $D(x)$ entonces

$$\begin{aligned} D(r) = r^2 + r + 1 &= 0 \qquad (5.44) \\ \frac{r^3 - 1}{r - 1} &= 0 \\ r^3 = 1 \text{ y } r &\neq 1 \end{aligned}$$

Luego

$$P(r) = D(r)Q(r) = 0$$

entonces r es un cero de $P(x)$

$$\begin{aligned} P(r) &= r^{2m} + r^m + 1 = 0 \\ &= (r^m)^2 + r^m + 1 = 0 \end{aligned}$$

entonces

$$(r^m)^2 + r^m = -1$$

En (5.44)

$$\begin{aligned} r^2 + r &= (r^m)^2 + r^m \\ -(r^m - r) &= (r^m)^2 - r^2 \end{aligned}$$

Analizamos este resultado siguiendo dos caminos:

$$\begin{aligned} -(r^m - r) &= (r^m - r)(r^m + r) \\ -1 &= r^m + r \\ r^m &= -(r + 1) \\ r^m &= r^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r^m &= r \\ r^{m-1} &= 1 \\ (r^3)^{\frac{m-1}{3}} &= 1 \\ (1)^{\frac{m-1}{3}} &= 1 \end{aligned}$$

$$r^{m-2} = 1$$
$$(r^3)^{\frac{m-2}{3}} = 1$$
$$1^{\frac{m-2}{3}} = 1 \Leftrightarrow \frac{m-2}{3} \text{ es par}$$
$$\frac{m-2}{3} = 2t$$
$$m = 6t + 2, t \in \mathbb{Z}^+$$
$$m = \overset{\circ}{6} + 2$$

$$\frac{m-1}{3} \text{ es par} \to \frac{m-1}{3} = 2k, k \in \mathbb{Z}^+$$
$$m = 6k + 1$$
$$m = \overset{\circ}{6} + 1$$

$P(x)$ es divisible por $D(x)$ si m es múltiplo de $6 + 2$ y m es múltiplo de $6 + 1$

Ejemplo 5.55

Demostrar que si $P(x^n)$ es divisible por $(x - 1)$, entonces $P(x^n)$ también es divisible por $(x^n - 1)$.

Solución.
En efecto, si $P(x^n)$ es divisible por $(x - 1)$, entonces existe un polinomio $Q(x)$ tal que

$$P(x^n) = (x - 1)Q(x) \text{ y } P(1^n) = (1 - 1)Q(1) = 0$$

entonces $P(1) = 0$.
Si $P(1) = 0$, entonces $P(x)$ es divisible por $(x - 1)$, por consiguiente existe $Q_1(x)$ tal que

$$P(x) = (x - 1)Q_1(x) \tag{5.45}$$

En la Ecuación (5.45), la variable puede ser y, z, x^2, x^n entonces

$$P(x^n) = (x^n - 1)Q_1(x^n)$$

lo que indica que $P(x^n)$ es divisible por $(x^n - 1)$.

Ejemplo 5.56

Demostrar que si $P(x) = p_1(x^3) + xp_2(x^3)$ es divisible por $D(x) = x^2 + x + 1$ entonces $p_1(x)$ y $p_2(x)$ son divisibles por $(x - 1)$.

Solución.

Si $P(x) = p_1(x^3) + xp_2(x^3)$ es divisible por $D(x) = x^2 + x + 1$ entonces existe $Q(x)$ tal que $P(x) = D(x)Q(x)$.

Es decir

$$p_1(x^3) + xp_2(x^3) = (x^2 + x + 1)Q(x)$$

Si r es un cero de $D(x)$ entonces

$$D(r) = r^2 + r + 1 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} r = -(r^2 + 1) \\ \frac{r^3 - 1}{r - 1} = 0 \to r^3 = 1 \text{ y } r \neq 1 \end{cases}$$

r es también un cero de $P(x)$ entonces

$$\begin{aligned} P(r) &= 0 \\ P(r) &= p_1(r^3) + rp_2(r^3) = 0 \\ p_1(1) &+ rp_2(1) = 0 \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} p_1(1) = 0 & \Longrightarrow (x-1) \text{ es un factor de } p_1(x) \\ & \Longleftrightarrow P(x) \text{ es divisible } (x-1) \\ p_2(1) = 0 & \Longrightarrow (x-1) \text{ es un factor de } p_2(x) \\ & \Longleftrightarrow P(x) \text{ es divisible } (x-1) \end{cases}$$

Ejemplo 5.57

Para qué valores de m, $P(x) = x^m - (x-1)^m - 1$ es divisible por $D(x) = x^2 - x + 1$.

Solución.

Sea $P(x) = D(x)Q(x) + R(x)$ (por el algoritmo de la división).

Si $P(x)$ es divisible por $D(x)$ entonces

$$P(x) = D(x)Q(x) \qquad (R(x) = 0)$$

Si r es un cero de $D(x)$ entonces

$$D(r) = r^2 - r + 1 = 0 \quad \text{y} \quad P(r) = \overset{0}{\cancel{D(r)}}Q(r) = 0$$

entonces r es un cero de $P(x)$. Luego

$$P(r) = r^m - (r-1)^m - 1 = 0 \tag{5.46}$$

$$D(r) = r^2 - r + 1 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} r^2 = r - 1 \\ \dfrac{r^3+1}{r+1} = 0 \Longrightarrow r^3 = -1 \text{ y } r \neq -1 \end{cases} \tag{5.47}$$

En (5.46)

$$r^m - (r^2)^m - 1 = 0$$

$$(r^m)^2 - r^m + 1 = 0 \tag{5.48}$$

De (5.47) y (5.48)

$$r^2 - r = (r^m)^2 - r^m$$

$$r^m - r = (r^m)^2 - r^2 \tag{5.49}$$

Analizamos este resultado siguiendo dos caminos

$$\begin{aligned}
\cancel{r^m - r} &= \cancel{(r^m - r)}(r^m + r) \\
1 &= r^m + r \\
r^m &= 1 - r = -r^2 \\
\frac{r^m}{r^2} &= -1 \\
r^{m-2} &= -1 \\
(r^3)^{\frac{m-2}{3}} &= -1 \\
(-1)^{\frac{m-2}{3}} &= -1 \Leftrightarrow \frac{m-2}{3} \text{ es impar} \\
\frac{m-2}{3} &= 2t + 1,\ t \in \mathbb{Z}^+ \\
m - 2 &= 6t + 3 \\
m &= 6t + 5 \\
m &= 6t + (6 - 1) \\
m &= 6(t + 1) - 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r^m &= r \\
r^{m-1} &= 1 \\
(r^3)^{\frac{m-1}{3}} &= 1 \\
(-1)^{\frac{m-1}{3}} &= 1 \Leftrightarrow \frac{m-1}{3} \text{ es par} \\
\frac{m-1}{3} &= 2t,\ t \in \mathbb{Z}^+ \\
m - 1 &= 6t \\
m - 1 &= 6t \\
m &= 6t + 1 \\
m &= \overset{\circ}{6} + 1
\end{aligned}$$

$$m = 6k - 1$$

$$m = \overset{\circ}{6} - 1$$

En consecuencia, $P(x)$ es divisible por $D(x)$ si $m = \overset{\circ}{6} \pm 1$.

5.17 División sintética

El método de división sintética ha sido diseñado para facilitar la obtención d cociente $Q(x)$ y el resto R cuando un polinomio $P(x)$ se divide por $(x - r)$.

Sea

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \; a_n \neq 0 \qquad (5.5$$

un polinomio de grado n. Entonces si

$$P(x) = (x - r)Q(x) + R$$

$Q(x)$ es un polinomio de grado $(n - 1)$ y R es una función constante.

Sea

$$Q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0, \; b_{n-1} \neq 0$$

un polinomio de grado $(n - 1)$. Deseamos determinar los coeficientes de $Q(x)$ el resto R. Como

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - r)Q(x) + R \\ &= b_{n-1} x^n + b_{n-2} x^{n-1} + \cdots + b_1 x^2 + b_0 x \\ &\quad - r(b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0) + R \\ &= b_{n-1} x^n + (b_{n-2} - r b_{n-1}) x^{n-1} + \cdots + (b_0 - r b_1) x + (R - r b_0) \end{aligned} \qquad (5.5$$

Igualando los coeficientes de (5.50) y (5.51)

$$\begin{array}{rclcrcl} a_n &=& b_{n-1} &\Longrightarrow& b_{n-1} &=& a_n \\ a_{n-1} &=& b_{n-2} - rb_{n-1} &\Longrightarrow& b_{n-2} &=& a_{n-1} + rb_{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ a_1 &=& b_0 - rb_1 &\Longrightarrow& b_0 &=& a_1 + rb_1 \\ a_0 &=& R - rb_0 &\Longrightarrow& R &=& a_0 + rb_0 \end{array}$$

Para facilitar el cálculo, construimos el siguiente esquema

$$\begin{array}{l|l} \begin{array}{ccccccc} \xrightarrow{\text{fila 1}} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ \xrightarrow{\text{fila 2}} & & rb_{n-1} & & rb_1 & rb_0 \\ \hline & \underbrace{a_n} & \underbrace{a_{n-1} + rb_{n-1}} & \cdots & \underbrace{a_1 + rb_1} & \underbrace{a_0 + rb_0} \\ \xrightarrow{\text{fila 3}} & b_{n-1} & b_{n-2} & & b_0 & R \end{array} & r \end{array}$$

En la fila 3 del esquema están los coeficientes de $Q(x)$ y el resto R.

Nota

1) Si una de las potencias de x no aparece en el polinomio, entonces esa potencia de x tiene coeficiente cero y la división sintética debe tener un cero en la posición correspondiente.

2) La división sintética se ha diseñado para la división por $(x - r)$ de modo que cuando dividamos por $(x + a)$, hemos de hacer $r = -a$

Ejemplo 5.58

Encontrar el cociente $Q(x)$ y el residuo R cuando el polinomio $P(x) = 3x^5 - 2x^3 + 7x^2 - 2x - 60$ se divide por $x + 2$

Solución.

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 3 & 0 & -2 & 7 & -2 & -60 & -2 \\ & -6 & 12 & -20 & 26 & -48 & \\ \hline 3 & -6 & 10 & -13 & 24 & \boxed{-108} & \end{array}$$

$$Q(x) = 3x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 13x + 24 \text{ y } R = -108$$

Además por el Teorema del Residuo, $P(r) = R$, es decir, $P(-2) = -10$
Comprobando

$$P(-2) = 3(-2)^5 - 2(-2)^3 + 7(-2)^2 - 2(-2) - 60 = -108$$

Ejemplo 5.59

Si $P(x) = x^4 + 9x^3 - 2x^2 + 1$. Encontrar $P(\frac{1}{3})$.

Solución.

Por el Teorema del Residuo $P(\frac{1}{3}) = R$, donde R es el resto de dividir $P(x)$ pc $(x - \frac{1}{3})$

$$\begin{array}{ccccc|c}
1 & 9 & -2 & 0 & 1 & \\
 & \frac{1}{3} & \frac{28}{9} & \frac{10}{27} & \frac{10}{81} & \frac{1}{3} \\
\hline
1 & \frac{28}{3} & \frac{10}{9} & \frac{10}{27} & \boxed{\frac{91}{81}} &
\end{array}$$

$$P(r) = R \Longrightarrow P(\frac{1}{3}) = \frac{91}{81}$$

Comprobando

$$(\frac{1}{3})^4 + 9(\frac{1}{3})^3 - 2(\frac{1}{3})^2 + 1 = \frac{91}{81}$$

5.18 Ejercicios propuestos

1) Encontrar el cociente y el residuo

(a) Si $P(x) = x^4 - 3x^2 + 7x - 6$ se divide por $x - 3$

(b) Si $P(x) = 5x^3 - 2x^2 + 21x - 1$ se divide por $x + 5$

(c) Si $P(x) = 2x^5 - 3x^4 + 7x^2 - x + 3$ se divide por $x - 4$

(d) Si $P(x) = 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 13$ se divide por $x + 1$

2) Usando la división sintética

(a) Si $P(x) = x^4 + 8x^3 - 12x^2 - 15x + 7$, encontrar $P(1), P(\frac{1}{2}), P(-3)$

(b) Si $P(x) = 3x^5 + 5x^3 + 2x^2 - 6x + 3$ encontrar $P(-2), P(-\frac{1}{3}), P(-3)$

(c) Si $P(x) = x^3 + 16x^2 - 15x + 8$ encontrar $P(-1), P(\frac{1}{4}), P(1)$

(d) Si $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x - 1$ encontrar $P(2), P(\frac{1}{2}), P(-\frac{2}{3})$

5.19 Ceros reales de polinomios con coeficientes reales

Existen algunos criterios que nos ayudarán en esta búsqueda. Nos hacemos las siguientes preguntas:

1) Cómo se obtiene información sobre el posible número de ceros reales de un polinomio dado.

2) Cómo encontrar un intervalo que contiene a todos los ceros reales, si estos existen.

3) Cómo aislamos en particular un cero dentro de tal intervalo.

5.19.1 Regla de los signos de Descartes

Definición 5.30

Cuando los términos de un polinomio con coeficientes reales se colocan en orden decreciente de potencias, se dice que ocurre una **variación en el signo**, se denota por N, si dos términos consecutivos tienen signo opuesto. Los términos que no aparecen se ignoran.

Ejemplo 5.60

$P(x) = 7x^4 - 2x^3 + 3x - 6 \Longrightarrow N = 3$ variaciones en el signo
$P(-x) = 7x^4 + 2x^3 - 3x - 6 \Longrightarrow N = 1$ variación en el signo

Regla

Sea

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0$$

un polinomio de grado n y sea N el número de variaciones de signo en la sucesión $\{a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0\}$. Entonces

1) El número de *ceros reales positivos* es igual a N ó $N - 2k$ donde $k \in \mathbb{Z}^+$

2) el número de *ceros reales negativos* se obtiene usando el mismo procedimiento para el polinomio $P(-x)$

En el ejemplo anterior

$P(x)$: $N = 3$ ó 1 ceros reales positivos

$P(-x)$: $N = 1$ cero real negativo.

Nota

En el Ejemplo (5.60) $P(x)$ es un polinomio de grado par ($n = 4$), entonces pueden darse las siguientes posibilidades:

1) Si los 4 ceros son reales, entonces 3 son positivos y 1 negativo.

2) Si 2 ceros son reales, entonces 1 es positivo y 1 es negativo.

3) Los 4 ceros son complejos.

Ejemplo 5.61

Si $P(x) = x^5 + 3x^4 - x^3 + x - 2$. Averiguar el signo del posible número de ceros reales

Solución.

$$P(x) = x^5 + 3x^4 - x^3 + x - 2 \Longrightarrow N = 3 \text{ ó } 1 \text{ ceros reales positivos}$$
$$P(x) = -x^5 + 3x^4 + x^3 - x - 2 \Longrightarrow N = 2 \text{ ó } 0 \text{ ceros reales negativos}$$

Nota

$P(x)$ es un polinomio de grado impar, entonces por lo menos tiene un cero real

1) Si $P(x)$ tiene 1 cero real, este tiene signo positivo.

2) Si $P(x)$ tiene 3 ceros reales: 3 positivos o 1 es positivo y 2 son negativos.

3) Si $P(x)$ tiene 5 ceros reales: 3 son positivos y 2 son negativos.

5.20 Cotas para los ceros reales

Definición 5.31

Cualquier número que sea mayor o igual que el mayor cero de un polinomio se llama **cota superior de los ceros** del polinomio.

Definición 5.32

Cualquier número que sea menor o igual que el menor cero de un polinomio se llama **cota inferior de los ceros** del polinomio.

Teorema 5.19

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ con $a_n > 0$ es un polinomio con coeficientes reales y $P(x)$ se divide por $(x - r)$ usando división sintética. Entonces

1) Si $r > 0$ y todos los números en la fila 3 de la división sintética son no negativos, entonces r es una cota superior de $P(x)$.

2) Si $r < 0$ y todos los números en la fila 3 de la división sintética alternan de signo (si hay ceros en la fila 3 se puede escribir $+0$ ó -0) entonces r es una cota inferior de los ceros de $P(x)$.

Ejemplo 5.62

Si $P(x) = x^3 - 3x^2 - 18x + 4$. Probar que 6 es cota superior y -4 es cota inferior de los ceros de $P(x)$.

Dividimos $P(x)$ por $(x-6)$ usando división sintética (DS)

Solución.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -3 & -18 & 4 & \\ & 6 & 18 & 0 & 6 \\ \hline \xrightarrow{\text{fila 3}} 1 & 3 & 0 & 4 & \end{array}$$

Todos los números en la fila 3 de la DS son no negativos, 6 es cota superior de los ceros de $P(x)$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -3 & -18 & 4 & \\ & -4 & 28 & -40 & -4 \\ \hline \xrightarrow{\text{fila 3}} 1 & -7 & 10 & -36 & \end{array}$$

los números en la fila 3 de la DS alternan de signo entonces -4 es cota inferior de los ceros de $P(x)$.

Nota

Es obvio preguntarse porqué 6 y -4. Vamos a cambiar el esquema de la división sintética considerando sólo las filas 1 y 3.

	$P(x)$					
		1	-3	-18	4	$\leftarrow$ fila 1
	0	1	-3	-18	4	$\leftarrow$ fila 3
	1	1	-2	-20	-16	$\leftarrow$ fila 3
	2	1	-1	-20	-36	
	3	1	0	-18	-50	
	4	1	1	-14	-52	
	5	1	2	-8	-36	
cota superior	6	1	3	0	4	$\leftarrow$ fila 3 : todos los números son no negativos
	-1	1	-4	-14	18	
	-2	1	-5	-8	20	
	-3	1	-6	0	4	
cota inferior	-4	1	-7	10	-36	$\leftarrow$ fila 3 : los números alternan de signo

Por tanto $-4 \leq r \leq 6$, los ceros reales están en el intervalo $[-4, 6]$.

Ejemplo 5.63

Si $P(x) = 3x^4 - x^3 - 4x^2 - 3x + 4$. Encontrar cotas para los ceros reales de $P(x)$.

	$P(x)$	3	−1	−4	−3	4
	0	3	−1	−4	−3	4
	1	3	2	−2	−5	−1
cota superior	2	3	5	6	9	22
cota inferior	−1	3	−4	0	−3	7

$r \in [-1, 2]$ donde r es un número real.

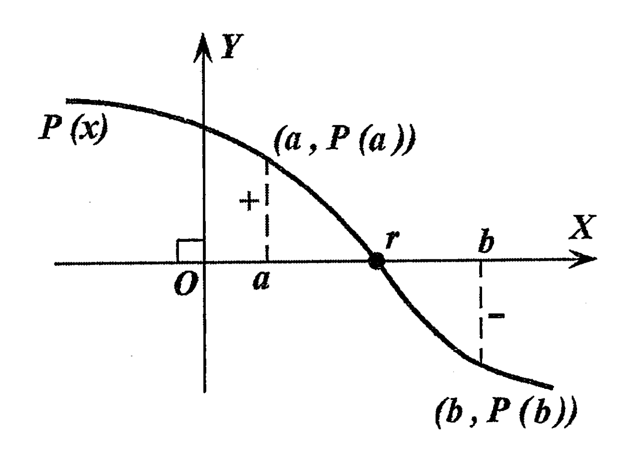
Cómo aislamos o ubicamos en particular un cero. Para ello, tenemos que recordar algunas propiedades del Cálculo

1) Los polinomios reales de variable real $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

son continuos en $\mathbb{R}$.

2) **Teorema del valor intermedio (TVI).** si la función $P(x)$ es continua sobre $[a, b]$ y si $P(a)$ y $P(b)$ tienen signos opuestos entonces existe un número $r \in \langle a, b\rangle$ tal que $P(r) = 0$. Gráficamente



3) $P(x)$ es creciente en $\langle a, b\rangle$ si $x_1 < x_2$ entonces $P(x_1) < P(x_2) \forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$.

$P(x)$ es decreciente en $\langle a, b\rangle$ si $x_1 < x_2$ entonces $P(x_1) > P(x_2) \forall x_1, x_2$ ∈ $\langle a, b\rangle$.

4) Si $P'(x) > 0 \forall x \in \langle a, b\rangle$ entonces $P(x)$ es creciente en $\langle a, b\rangle$.

   Si $P'(x) < 0 \forall x \in \langle a, b\rangle$ entonces $P(x)$ es decreciente en $\langle a, b\rangle$.

5) Si $P''(x) > 0 \forall x \in \langle a, b\rangle$ entonces $P(x)$ es cóncava hacia arriba en $\langle a, b\rangle$.

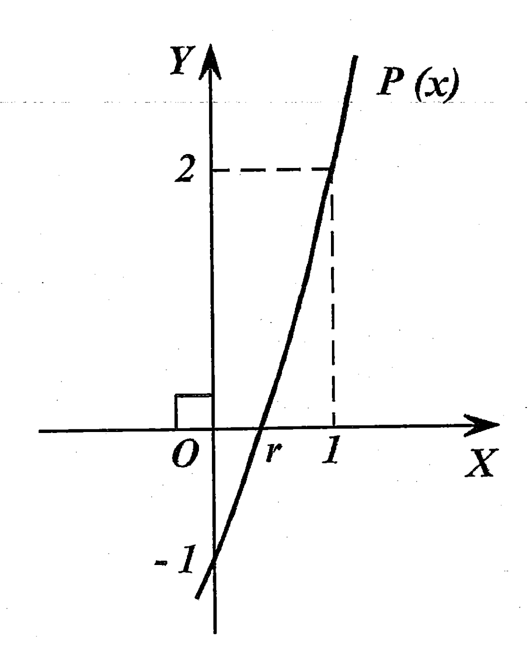
   Si $P''(x) < 0 \forall x \in \langle a, b\rangle$ entonces $P(x)$ es cóncava hacia abajo en $\langle a, b\rangle$.

Ejemplo 5.64

Mostrar que existe al menos un cero real de $P(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1$ e el intervalo [0, 1]

$P(x)$	1 3 −2 1 −1	
0	1 3 −2 1 −1	$= P(0)$
1	1 4 2 3 2	$= P(1)$

Entonces por TVI existe $r \in \langle 0, 1\rangle / P(r) = 0$



5.21 Ceros reales de polinomios con coeficientes enteros

En esta parte, vamos a enfocar nuestra atención al problema de encontrar los ceros racionales de polinomios con coeficientes racionales.

Ejemplo 5.65

$$P(x) = \frac{2}{7}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 1$$

Solución.
Si multiplicamos $P(x) = 0$ por el mínimo común denominador de los coeficientes que en este caso es 28 entonces

$$P(x) = 8x^3 - 21x^2 + 14x - 28 = 0$$

entonces el problema se reduce a encontrar los ceros racionales de polinomios con coeficientes enteros.

Definición 5.33

Dos números enteros c y d se dice que son **primos relativos** si los únicos enteros que dividen a ambos, c y d, son ± 1

Teorema 5.20: Teorema de las raíces racionales

Si el número racional $\frac{c}{d}$ donde c y d son primos relativos es una raíz de la ecuación

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \text{ donde } a_n \neq 0 \tag{5.52}$$

con coeficientes enteros, entonces c divide a a_0 y d divide a a_n.

Demostración. Si $\frac{c}{d}$ es una raíz de (5.52) entonces

$$a_n(\frac{c}{d})^n + a_{n-1}(\frac{c}{d})^{n-1} + \cdots + a_1(\frac{c}{d}) + a_0 = 0 \tag{5.53}$$

multiplicando (5.53) por d^n se tiene

$$a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1}d + \cdots + a_1 c d^{n-1} + a_0 d^n = 0 \tag{5.54}$$

$$c(a_n c^{n-1} + a_{n-1}c^{n-2}d + \cdots + a_1 d^{n-1}) = -a_0 d^n \tag{5.55}$$

la suma dentro de paréntesis en (5.55) es un número entero que tiene a c como factor, luego c divide a $-a_0 d^n$, pero c y d son primos relativos y c y d^n son

también primos relativos, como c divide a $-a_0 d^n$ y no tiene factores en común con d^n, entonces c divide a a_0.
Si en (5.54) factorizamos d se tiene

$$\begin{aligned} a_n c^n + d(a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_1 c d^{n-2} + a_0 d^{n-1}) &= 0 \\ d(a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_1 c d^{n-2} + a_0 d^{n-1}) &= -a_n c^n \qquad (5.56) \end{aligned}$$

la suma dentro de paréntesis en (5.56) es un número entero que tiene a d como factor, luego d divide a $-a_n c^n$ pero c y d son primos relativos, c^n y d siguen siendo primos relativos, como d divide a $-a_n c^n$ y no tiene factores en común con c^n, entonces d divide a a_n. ◇

Corolario

Todas las raíces racionales de la ecuación polinomial

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (a_n = 1)$$

con coeficientes enteros son enteros y divisores de a_0

Regla (para encontrar los ceros racionales de polinomios con coeficientes enteros)

1) Usar el Teorema de las raíces racionales.

2) Usar la regla de los signos de Descartes.

3) Localizar cotas superiores e inferiores para los ceros reales.

4) Usar el Teorema del Valor Intermedio para ubicar el intervalo.

5) Usar División Sintética para ubicar la raíz racional.

6) Volver al paso 4 hasta terminar de ubicar todos los ceros racionales.

Ejemplo 5.66

Encontrar todos los ceros reales de

$$P(x) = 12x^5 + 28x^4 - 13x^3 - 40x^2 - 56x - 15$$

Solución.

1) Usamos el Teorema de las raíces racionales

$a_0 = -15, a_n = 12$

c: divisores de a_0: $c = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$

d: divisores de a_n: $d : \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

$\frac{c}{d} : \pm(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, 5, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \frac{5}{6}, \frac{5}{12}, 15, \frac{15}{2}, \frac{15}{4})$

ordenando en forma creciente

$\frac{c}{d} : \pm(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{2}, 3, \frac{15}{4}, 5, \frac{15}{2}, 15)$

2)

$$P(x) = 12x^5 + 28x^4 - 13x^3 - 40x^2 - 56x - 15 \Longrightarrow N = 1 \text{ cero real } +$$
$$P(-x) = -12x^5 + 28x^4 + 13x^3 - 40x^2 + 56x - 15 \Longrightarrow N = 4, 2, 0$$
ceros reales $-$

3) Localizamos cotas para los ceros reales

	$P(x)$	12	28	−13	−40	−56	−15
	0	12	28	−13	−40	−56	−15
	1	12	36	23	−17	−73	−88
	2	12	24	35	30	4	−7
cota sup	3	12	64	179	497	1435	4290
	−1	12	16	−29	−11	−45	30
	−2	12	4	−21	2	−60	105
cota inf	−3	12	−8	11	−73	163	−504

$$r \in [-3, 3]$$

4) Haciendo uso del Teorema del Valor Intermedio

$$\left.\begin{array}{r} P(0) = -15 \\ P(-1) = 30 \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists r \in \langle -1, 0\rangle / P(r) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} P(2) = -7 \\ P(3) = 4290 \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists r \in \langle 2,3\rangle / P(r) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} P(-2) = 105 \\ P(-3) = -504 \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists r \in \langle -3,-2\rangle / P(r) = 0$$

5) Elegimos $\frac{5}{2} \in \langle 2,3\rangle$ y $-\frac{5}{2} \in \langle -3,-2\rangle$

$P(x)$	12	28	−13	−40	−56	−15
$\frac{5}{2}$	12	58	132	290	669	$\frac{3315}{2}$
$-\frac{5}{2}$	12	−2	−8	−20	−6	0

$$P(x) = (x + \frac{5}{2})(12x^4 - 2x^3 - 8x^2 - 20x - 6)$$
$$P(x) = (2x + 5)(6x^4 - x^3 - 4x^2 - 10x - 3) = (2x + 5)Q(x)$$
$$Q(x) = 6x^4 - x^3 - 4x^2 - 10x - 3$$

Los ceros de $Q(x)$ son ceros de $P(x)$

$$Q(x) : a_0 = -3, a_n = 6$$
$$\frac{c}{d} : \frac{\text{divisores de } -3}{\text{divisores de } 6}$$

$\frac{3}{2} \in \langle 2,3\rangle$

$Q(x)$	6	−1	−4	−10	−3
$\frac{3}{2}$	6	8	8	2	0

$$Q(x) = (x - \frac{3}{2})(6x^3 + 8x^2 + 8x + 2)$$
$$Q(x) = (2x - 3)(3x^3 + 4x^2 + 4x + 1) = (2x - 3)T(x)$$
$$T(x) = 3x^3 + 4x^2 + 4x + 1$$

Los ceros de $T(x)$ son ceros de $P(x)$

$$T(x) : a_0 = 1, a_n = 3$$

$$\frac{c}{d} : \frac{\text{divisores de } 1}{\text{divisores de } 3}$$

$-\frac{1}{3} \in \langle -1, 0 \rangle$

$T(x)$	3 4 4 1
$-\frac{1}{3}$	3 3 3 0

$$T(x) = (x + \frac{1}{3})(3x^2 + 3x + 3)$$
$$T(x) = (3x + 1)(x^2 + x + 1)$$

$$P(x) = (2x + 5)(2x - 3)(3x + 1)(x - (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}))(x - (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}))$$
$$r_1 = -\frac{5}{2},\ r_2 = -\frac{1}{3},\ r_3 = \frac{3}{2},\ r_4 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ r_5 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ejemplo 5.67

Encontrar todos los ceros reales de

$$P(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + 4x - 24$$

Solución.

1) Por el Teorema de las raíces racionales

$$a_0 = -24,\ a_n = 1$$
$$c : \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$$
$$d : \pm 1$$
$$\frac{c}{d} : \pm(1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24)$$

Los ceros son enteros puesto que $a_n = 1$

2)

$$P(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + 4x - 24 \Longrightarrow N = 3, 1 \text{ ceros reales } +$$

$$P(-x) = x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x - 24 \Longrightarrow N = 1 \text{ cero real } -$$

3) Localizamos cotas para los ceros reales

	$P(x)$	1	1	−2	4	−24
	0	1	1	−2	4	−24
	1	1	2	0	4	−20
cota sup	2	1	3	4	12	0
	−1	1	0	−2	6	−30
	−2	1	−1	0	4	−32
cota inf	−3	1	−2	4	−8	0

$r \in [-3, 2]$

$$P(x) = (x-2)(x^3 + 3x^2 + 4x + 12) = (x-2)Q(x)$$
$$Q(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 12$$

$Q(x)$	1	3	4	12
−3	1	0	4	0

$$Q(x) = (x+3)(x^2+4)$$
$$P(x) = (x-2)(x+3)(x-2i)(x+2i)$$

Ejemplo 5.68

Encontrar los ceros reales de $P(x) = 4x^3 + x - 2$

Solución.

1) Usamos el teorema de las raíces racionales

$$a_0 = -2, \ a_n = 4$$
$$c : \text{divisores de } a_0 : c = \pm 1, \pm 2$$
$$d : \text{divisores de } a_n : d : \pm 1, \pm 2, \pm 4$$
$$\frac{c}{d} : \pm(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 2) = \pm(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2)$$

2)

$$P(x) = 4x^3 + x - 2 \Longrightarrow N = 1 \text{ cero real } +$$
$$P(-x) = -4x^3 - x - 2 \Longrightarrow N = 0 \text{ cero real } -$$

$P(x)$ es un polinomio de grado impar, tiene por lo menos un cero real

3) Localizamos cotas para los ceros reales

	$P(x)$	4	0	1	−2
	0	4	0	1	−2
cota sup	1	4	4	5	3
cota inf	−1	4	−4	5	−7

$r \in [-1, 1]$

4)

$$\left.\begin{array}{l} P(0) = -2 \\ P(1) = 3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists r \in \langle 0, 1\rangle / P(r) = 0$$

5)

$P(x)$	4	0	1	−3	
$\frac{1}{4}$	4	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{-7}{16}$	no es cero de $P(x)$
$\frac{1}{2}$	4	2	2	−2	no es cero de $P(x)$

En conclusión, el cero de $P(x)$ no es racional es irracional, puesto que $P(x)$ tiene un cero real.

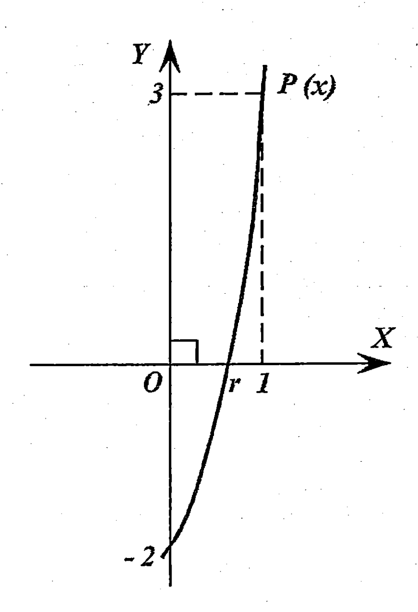
Ensayaremos un método intuitivo por aproximaciones sucesivas para encontrar el cero irracional de $P(x) = 4x^3 + x - 2$
Necesitamos la gráfica de $P(x)$ en el intervalo $[0, 1]$

$$P'(x) = 12x^2 + 1 \geq 0, \; \forall x \in \mathbb{R}$$

entonces $P(x)$ es creciente en todo su dominio.

$$P''(x) = 24x$$

Luego $P''(x) > 0$ si $x > 0$ entonces $P(x)$ es cóncavo hacia arriba en $[0, 1]$



Como 1ª aproximación tomemos 0 ó 1 y el error de aproximación será menor que 1.

Escogemos 0 ya que $|P(0)| < |P(1)|$ tal que $|r - 0| < 1$

Si deseamos una aproximación menor que 0.1 determinamos dos décimas sucesivas en que los valores de $P(x)$ sean de signos opuestos. De acuerdo al gráfico tomamos

$$P(0.5) = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} P(0.6) = -0.536 \\ P(0.7) = 0.072 \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists r \in \langle 0.6, 0.7\rangle / P(r) = 0$$

como $|P(0.7)| < |P(0.6)| \Longrightarrow$ elegimos 0.7 tal que $|r - 0.7| < 0.1$.

Deseamos una aproximación de orden de 10^{-2}

$$P(0.70) = 0.072$$

$$\left.\begin{array}{l} P(0.69) = 0.014 \\ P(0.68) = -0.062 \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists r \in \langle 0.68, 0.69\rangle / P(r) = 0$$

como $|P(0.69)| < |P(0.68)|$ entonces elegimos 0.69 tal que $|r - 0.69| < 10^{-2}$.

Deseamos una mejor aproximación del orden de 10^{-3}

$$\left.\begin{array}{l} P(0.690) = 0.014 \\ P(0.689) = -0.003 \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists r \in \langle 0.689, 0.690\rangle / P(r) = 0$$

como $|P(0.689)| < |P(0.690)|$ entonces elegimos 0.689 tal que $|r - 0.689| < 10^{-3}$

Y así sucesivamente podemos ubicar el cero irracional con el error de aproximación que uno desee.

5.22 Solución de ecuaciones mediante aproximaciones sucesivas

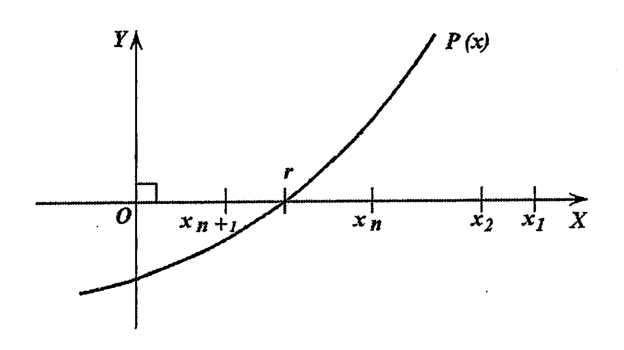
En este caso $P(x)$ es una función real de variable real y consideramos métodos para obtener aproximaciones a las soluciones reales de una ecuación $P(x) = 0$ y consiste en lo siguiente

1) No se obtendrán raíces exactas, sino raíces aproximadas.

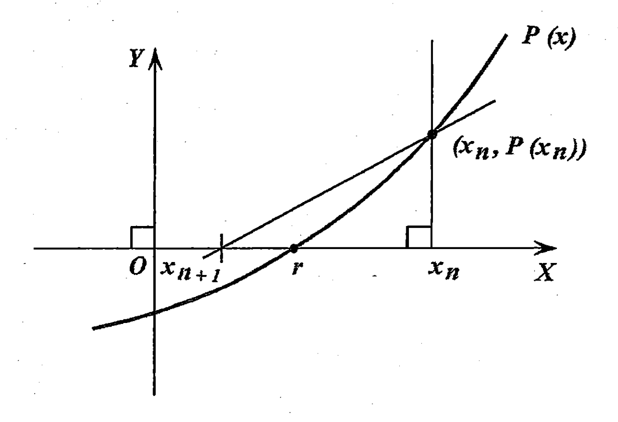
2) Si r es la raíz exacta, hallaremos raíces aproximadas $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots$ tales que

$$|r - x_1| > |r - x_2| > \ldots > |r - x_n| > |r - x_{n+1}| > \ldots$$

donde x_{n+1} se dice que es una mejor aproximación que x_n a la raíz r.



3) Si x_n es una aproximación a r, deseamos encontrar otra aproximación x_{n+1} (mejor que la anterior) entonces ensayamos encontrar otra aproximación x_{n+1} reemplazando en la vecindad del punto $(x_n, P(x_n))$ por una recta. La pendiente de esta recta debe elegirse de modo que la intersección con el eje X es x_{n+1} y es una mejor aproximación a r que x_n.



Si m es la pendiente de la recta

$$m = \frac{P(x_n) - 0}{x_n - x_{n+1}}$$

$$x_n - x_{n+1} = \frac{P(x_n)}{m}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{m}$$

donde se debe elegir m de tal forma que siempre se obtenga una mejor aproximación.

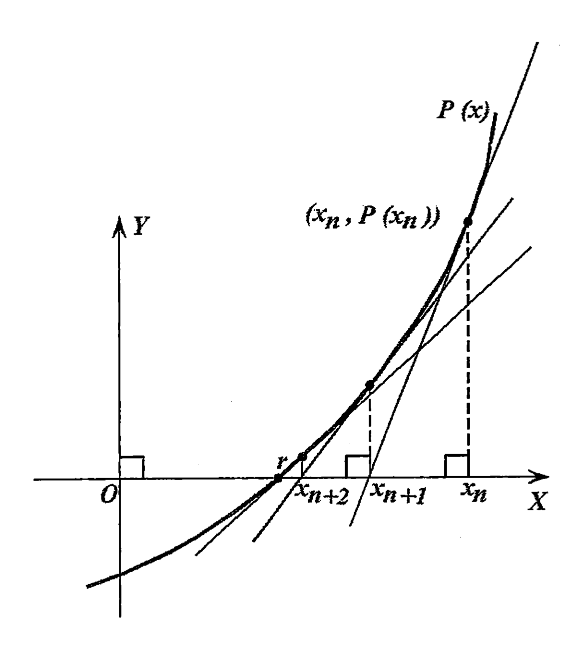
La mejor elección de m sería tomar la pendiente de la recta que pasa por $(x_n, P(x_n))$ y $(r, 0)$ entonces el problema quedaría resuelto con $x_{n+1} = r$.

Como no se conoce r entonces no se puede saber cuál es la elección ideal de m y nos tenemos que conformar con alguna aproximación a esta elección ideal.

4) **Método de Newton**. Si tomamos $m = P'(x_n)$, el método se llama método de Newton y se tendrá

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}$$

Gráficamente



Se nota que en 2 ó 3 pasos uno se aproxima fácilmente a la raíz exacta r, de modo que $|r - x_{n+2}| < \epsilon$ donde ϵ es el error absoluto de la aproximación

Regla

1) Asegurarse que la ecuación $P(x) = 0$ tiene al menos una raíz real, ya que de lo contrario el método no sirve.

2) Ubicar un intervalo que contenga a la raíz real r que se quiere aproximar.

3) Averiguar si en ese intervalo la función es creciente o decreciente.

4) La primera aproximación x_1 puede ser cualquier elemento del intervalo.

Ejemplo 5.69

Si $P(x) = x^3+2x^2-4x-1$. Encontrar la cero real positivo con una aproximación de 10^{-3}.

Solución.

$P(x)$ es un polinomio de grado impar entonces tiene por lo menos un cero real.

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 1 \Longrightarrow N = 1 \text{ cero real } +$$
$$P(-x) = -x^3 + 2x^2 + 4x - 1 \Longrightarrow N = 2 \text{ ó } 0 \text{ ceros reales } -$$

Buscamos cotas para los ceros de $P(x)$

	$P(x)$	1	2	-4	-1
	0	1	2	-4	-1
	1	1	3	-1	-2
cota sup	2	1	4	4	7
	-1	1	1	-5	4
	-2	1	0	-4	7
	-3	1	-1	-1	2
cota inf	-4	1	-2	4	-17
	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{19}{4}$	$\frac{11}{8}$

$$\left.\begin{array}{r} P(0) = -1 \\ P(-\frac{1}{2}) = \frac{11}{8} \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists r \in \langle -\frac{1}{2}, 0\rangle / P(r) = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} P(1) = -2 \\ P(2) = 7 \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists r \in \langle 1, 2\rangle / P(r) = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} P(-3) = 2 \\ P(-4) = -17 \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists r \in \langle -4, -3\rangle / P(r) = 0$$

Por tanto el polinomio $P(x)$ tiene un cero real $+$ y dos ceros reales $-$.
Averiguaremos en qué intervalos $P(x)$ es creciente o decreciente

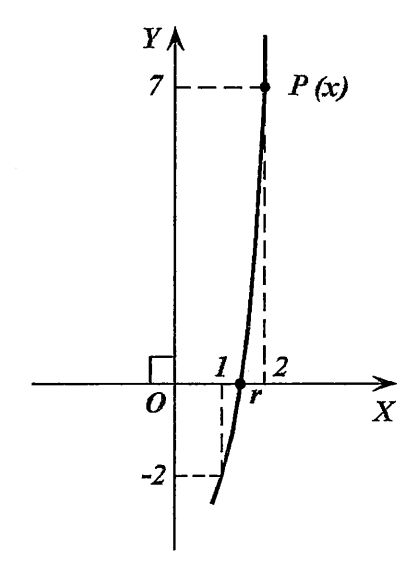
$$P'(x) = 3x^2 + 4x - 4 = (3x - 2)(x + 2)$$

$$P'(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle \frac{2}{3}, \infty\rangle \Longrightarrow P(x) \text{ es creciente}$$

$$P'(x) < 0 \Longleftrightarrow x \in \langle -2, \frac{2}{3}\rangle \Longrightarrow P(x) \text{ es decreciente}$$

$$P''(x) = 6x + 4 \Longrightarrow \begin{cases} P''(x) > 0 \Longleftrightarrow x > -\frac{2}{3} & \Longrightarrow P(x) \text{ es cóncava hacia arriba} \\ P''(x) < 0 \Longleftrightarrow x < -\frac{2}{3} & \Longrightarrow P(x) \text{ es cóncava hacia abajo} \end{cases}$$

La gráfica de $P(x)$ en $[1, 2]$ es creciente y cóncava hacia arriba



Usaremos el método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}$$

La aplicación de esta fórmula la presentamos en la siguiente tabla

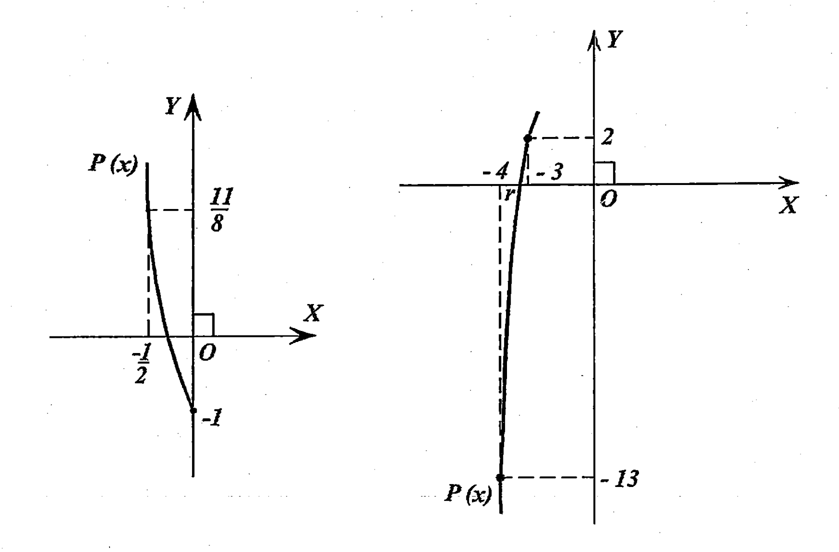
Podemos elegir cualquiera de los extremos del intervalo $[1, 2]$, elegimos $x_1 = 2$

x_n	$P(x_n)$	$m = P'(x_n)$	$-\frac{P(x_n)}{m}$	$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{m}$
2	7	20	−0.35	1.65
1.6	1.816	10.08	−0.180	1.42
1.42	0.2161	7.7292	−0.0280	1.392
1.392	0.0046	7.3810	−0.00062	1.3914
1.391	−0.00282			

$$\left.\begin{array}{l} P(1.391) = -0.00282 \\ P(1.392) = 0.0046 \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists r \in \langle 1.391, 1.392\rangle / P(r) = 0$$

$$|P(1.391)| < |P(1.392)| \Longrightarrow x_5 = 1.391$$
$$|r - 1.391| < 10^{-3} \text{ cero real positivo de } P(x)$$

Ensayaremos encontrar las raíces reales negativas de $P(x) = 0$ usando el mismo método de Newton. Hemos visto que las raíces reales negativas se encuentran en los intervalos $\langle -\frac{1}{2}, 0\rangle$ y $\langle -4, -3\rangle$



Calculamos $r \in \langle -\frac{1}{2}, 0\rangle$ usando el método de Newton $P(x)$ es decreciente y cóncava hacia arriba

x_n	$P(x_n)$	$m = P'(x_n)$	$-\frac{P(x_n)}{m}$	$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{m}$
−0.5	1.375	−3.25	+0.4230	−0.077
−0.07	−1.7105	−3.7053	−0.4616	−0.5316
−0.531	1.5382	−5.2781	+0.2914	−0.2396
−0.239	−0.0676	−4.7846	+0.0141	−0.2249
−0.225	−0.0101	−4.7481	−0.0021	−0.2271
−0.227	−0.00064	−4.7534	−0.00013	−0.22713
−0.228	0.00412			

$$\left.\begin{array}{r} P(-0.227) < 0 \\ P(-0.228) > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists r \in \langle -0.228, -0.227\rangle / P(r) = 0$$

$$|P(-0.227)| < |P(-0.228)| \Longrightarrow x_7 = -0.227$$

$$|r - (-0.227)| < 10^{-3}$$

Calculamos $r \in \langle -4, -3 \rangle$ usando el método de Newton $P(x)$ es creciente y cóncava hacia abajo

x_n	$P(x_n)$	$m = P'(x_n)$	$-\frac{P(x_n)}{m}$	$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{m}$
−4	2	28	−0.0714	−4.0714
−4.07	−19.0093	29.4147	+0.6462	−3.4248
−3.42	−3.9289	17.4092	+0.2257	−3.1943
−3.19	−0.3496	13.7683	+0.02539	−3.1646
−3.164	0.0033	13.3767	−0.00025	−3.16425
−3.165	−0.0101			

$$P(-3.164) > 0, P(-3.165) < 0 \Longrightarrow \exists r \in \langle -3.165, -3.164 \rangle / P(r) = 0$$
$$|P(-3.164)| < |P(-3.165)| \Longrightarrow x_6 = -3.164$$
$$|r - (-3.164)| < 10^{-3}$$

Nota

Existen otros métodos como el "método de la secante" o el "método de la bisección" para encontrar por aproximaciones sucesivas los ceros reales de $P(x)$. Este tema es materia del curso de Métodos Numéricos, donde el método de Newton y otros se aplican con mayor amplitud y con el uso de la tecnología actual.

5.23 Ejercicios resueltos

Ejercicio 5.43

Sean los polinomios

$$P(x) = x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$$
$$Q(x) = (n - 2m)x^n - nx^{n-m} + nx^m - (n - 2m)$$

Averiguar la multiplicidad del cero $r = 1$ del polinomio $P(x)Q(x)$

Solución.

$$P(x) = x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1 \Longrightarrow P(1) = 0$$
$$P'(x) = 2nx^{2n-1} - n(n+1)x^{n} + n(n-1)x^{n-2} \Longrightarrow P'(1) = 0$$
$$P''(x) = 2n(2n-1)x^{2n-2} - n^2(n+1)x^{n-1} + n(n-1)(n-2)x^{n-3} \Longrightarrow P''(1) = 0$$

Si $a = 2n(2n-1), b = n^2(n+1), c = n(n-1)(n-2)$ entonces

$$P''(x) = ax^{2n-2} - bx^{n-1} + cx^{n-3}$$
$$P^{(3)}(x) = a(2n-2)x^{2n-3} - b(n-1)x^{n-2} + c(n-3)x^{n-4} \text{ y } P^{(3)}(1) \neq 0$$

$r = 1$ es un cero de multiplicidad 3 de $P(x)$

$$Q(x) = (n-2m)x^{n} - nx^{n-m} + nx^{m} - (n-2m) \Longrightarrow Q(1) = 0$$
$$Q'(x) = n(n-2m)x^{n-1} - n(n-m)x^{n-m-1} + nmx^{m-1} \Longrightarrow Q'(1) = 0$$
$$Q''(x) = n(n-1)(n-2m)x^{n-2} - n(n-m)(n-m-1)x^{n-m-2} + nm(m-1)x^{m-2} \Longrightarrow Q''(1) = 0$$

Si $k = n(n-1)(n-2m),\ r = n(n-m)(n-m-1),\ t = nm(m-1)$

$$Q''(x) = kx^{n-2} - rx^{n-m-2} + tx^{m-2}$$
$$Q^{(3)}(x) = k(n-2)x^{n-3} - r(n-m-2)x^{n-m-3} + t(m-2)x^{m-3} \text{ y } Q^{(3)}(1) \neq 0$$

$r = 1$ es un cero de multiplicidad 3 de $Q(x)$.
Por tanto $r = 1$ es un cero de multiplicidad 6 de $P(x)Q(x)$

Ejercicio 5.44

D.q. los ceros del polinomio $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ son también ceros de $Q(x) = x^{4p} + x^{4q+1} + x^{4t+2} + x^{4m+3}$, donde p, q, t, m son enteros positivos

cualesquiera.

Solución.
Si r es un cero de $P(x)$ entonces

$$P(r) = r^3 + r^2 + r + 1 = 0.$$

Debemos demostrar que r es un cero de $Q(x)$.

$$r^3 + r^2 + r + 1 = 0 \Longrightarrow r^3 + r^2 + r = -1$$
$$r(r^3 + r^2 + r + 1) = 0 \Longrightarrow r^4 + \underbrace{r^3 + r^2 + r}_{-1} = 0 \Longrightarrow r^4 - 1 = 0 \Longrightarrow r^4 = 1$$

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x^4)^p + (x^4)^q x + (x^4)^t x^2 + (x^4)^m x^3 \\ Q(r) &= (r^4)^p + (r^4)^q r + (r^4)^t r^2 + (r^4)^m r^3 \\ &= 1^p + 1^q r + 1^t r^2 + 1^m r^3 \\ &= 1 + r + r^2 + r^3 = 0 \Longrightarrow r \text{ es un cero de } Q(x) \end{aligned}$$

Ejercicio 5.45

Determinar A y B de modo que $P(x) = Ax^{n+1} + Bx^n + 1$ sea divisible por $D(x) = (x-1)^2$

Solución.
Si $D(x) = (x-1)^2$ entonces $D(1) = 0$ luego 1 es un cero de multiplicidad 2 de $D(x)$.
Para d.q. $P(x)$ es divisible por $D(x)$, 1 debe ser un cero de multiplicidad 2 de $P(x)$

$$P(x) = Ax^{n+1} + Bx^n + 1 \Longrightarrow P(1) = A + B + 1 = 0 \tag{5.57}$$
$$P'(x) = (n+1)Ax^n + nBx^{n-1} \Longrightarrow P'(1) = (n+1)A + nB = 0 \tag{5.58}$$
$$P''(x) = (n+1)(n)Ax^{n-1} + n(n-1)Bx^{n-2}$$
$$\Longrightarrow P''(1) = n(n+1)A + n(n-1)B \neq 0 \tag{5.59}$$

De (5.57) y (5.58)

$$\left.\begin{aligned} A+B&=-1\\ (n+1)A+nB&=0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow A=n,\ B=-(n+1)$$

Ejercicio 5.46

D.q. si $f(x^n)$ es divisible por $(x-a)^k$ entonces $f(x^n)$ es divisible por $(x^n - a^n)^k, a \neq 0$

Solución.
En efecto, si $f(x^n)$ es divisible por $(x-a)^k$, entonces

$$f(x^n) = (x-a)^k Q(x)$$

Si hacemos $x = a$, entonces

$$f(a^n) = (a-a)^k Q(a) = 0$$

$f(x^n)$ es divisible por $(x^n - a^n)^k$, entonces

$$f(x^n) = (x^n - a^n)^k T(x)$$

Si $x = a$, debemos demostrar que

$$f(a^n) = (a^n - a^n)^k T(x) = 0$$

$$\begin{aligned} f(x^n) &= (x-a)^k (x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})^k T(x)\\ f(a^n) &= (a-a)^k (a^{n-1} + a^{n-1} + \cdots + a^{n-1})^k T(a)\\ &= (a-a)^k (na^{n-1})^k T(a)\\ &= 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 5.47

Para qué valores de m, $P(x) = (x+2)^m - (x+1)^m - 1$ es divisible por $D(x) = x^2 + 3x + 3$

Solución.

$$
\begin{aligned}
P(x) &= ((x+1)+1)^m - (x+1)^m - 1 \\
D(x) &= (x+1)^2 + (x+1) + 1
\end{aligned}
$$

Haciendo un cambio de variable $y = x + 1$

$$
\begin{aligned}
P(y-1) &= (y+1)^m - y^m - 1 \\
D(y-1) &= y^2 + y + 1
\end{aligned}
$$

Si $P(w) = D(w)Q(w)$ entonces se dice que $P(w)$ es divisible por $D(w)$, es decir

$$
\begin{aligned}
P(r) &= \overset{0}{D(r)}Q(r) = 0 \\
D(r) &= r^2 + r + 1 \Longrightarrow r + 1 = -r^2
\end{aligned}
$$

$D(r)$ tiene ceros diferentes de 1 entonces

$$
\underset{\neq 0}{(r-1)}\underset{=0}{(r^2+r+1)} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} r^3 - 1 = 0 \\ r^3 = 1 \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
P(r) &= (r+1)^m - r^m - 1 = 0 \\
&= (-r^2)^m - r^m - 1 = 0 \\
&= (-1)^m (r^m)^2 - r^m - 1 = 0
\end{aligned}
$$

$$
m = \begin{cases} 2k & \text{par} \\ 2k+1 & \text{impar} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}^+
$$

1) Si m es par $(m = 2k)$ entonces

$$
\begin{aligned}
P(r) &= (r^{2k})^2 - r^{2k} - 1 = 0 \\
&= (r^4)^k - (r^2)^k - 1 = 0 \\
&= r^k - r^{2k} - 1 = 0
\end{aligned}
$$

$$r^{2k} - r^k = -1 = r^2 + r$$
$$r^{2k} - r^2 = r^k + r$$
$$(r^k + r)(r^k - r) = r^k + r$$

entonces

$$r^k - r = 1$$
$$r^k = 1 + r = -r^2$$
$$r^k = -r^2$$

Si $k = 1 \Longrightarrow r = -r^2$ no cumple
$k = 2 \Longrightarrow r^2 = -r^2$ no cumple
$k = 3 \Longrightarrow r^3 = -r^2 \Longrightarrow 1 = -r^2$ no cumple
$k = 4 \Longrightarrow r^4 = -r^2 \Longrightarrow r = -r^2$ no cumple
$k = 5 \Longrightarrow r^5 = -r^2 \Longrightarrow r^2 = -r^2$ no cumple
$k = 6 \Longrightarrow r^6 = -r^2 \Longrightarrow 1 = -r^2$ no cumple

Por tanto m no puede ser par

2) Si m es impar ($m = 2k + 1$) entonces

$$P(r) = (-1)^{2k+1}(r^2)^{2k+1} - r^{2k+1} - 1 = 0$$
$$(r^2)^{2k+1} + r^{2k+1} + 1 = 0$$
$$(r^2)^{2k} r^2 + r^{2k+1} + 1 = 0$$
$$(r^4)^k r^2 + r^{2k+1} + 1 = 0, \qquad r^4 = r$$
$$r^{k+2} + r^{2k+1} + 1 = 0$$

Si $k = 0 \Longrightarrow r^2 + r + 1 = 0$ cumple y $m = 2k + 1 = 1$
$k = 1 \Longrightarrow r^3 + r^3 + 1 \neq 0$ no cumple
$k = 2 \Longrightarrow r^4 + r^5 + 1 = r + r^2 + 1 = 0$ cumple y $m = 2k + 1 = 5$

$$k = 3 \Longrightarrow r^5 + r^7 + 1 = r^2 + r + 1 = 0 \text{ cumple y } m = 2k + 1 = 7$$
$$k = 4 \Longrightarrow r^6 + r^9 + 1 = 1 + 1 + 1 \neq 0 \text{ no cumple}$$
$$k = 5 \Longrightarrow r^7 + r^{11} + 1 = r + r^2 + 1 = 0 \text{ cumple y } m = 2k + 1 = 11$$

$$m = 1, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots \qquad m = \overset{\circ}{6} \pm 1$$

Ejercicio 5.48

Dadas las funciones f y g definidas por

$$f(x) = A(x+2)^{n+1} + B(x+2)^n + 1$$
$$g(x) = x^2 + 2x + 1$$

Determinar A y B de modo que $f(x)$ sea divisible por $g(x)$.

Solución.
Si $f(x)$ es divisible por $g(x)$ entonces los ceros de $g(x)$ son ceros de $f(x)$.
Los ceros de $g(x)$

$$g(x) = (x+1)^2 = 0 \Longrightarrow x = -1$$

es un cero de multiplicidad 2, entonces

$$f(-1) = 0 \quad \text{y} \quad f'(-1) = 0$$
$$f(-1) = A + B + 1 = 0 \tag{5.60}$$
$$f'(x) = A(n+1)(x+2)^n + Bn(x+2)^{n-1}$$
$$f'(-1) = (n+1)A + nB = 0 \tag{5.61}$$

De (5.60) y (5.61)

$$\left.\begin{aligned} A + B &= -1 \\ (n+1)A + nB &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad A = n, \quad B = -1 - n$$

Ejercicio 5.49

Un conjunto solución de $z^3 - z^2 - 1 = 0$ es $\{r_1, r_2, r_3\}$. Hallar la ecuación cuyo conjunto solución es $\{r_1 + r_2, r_1 + r_3, r_2 + r_3\}$.

Solución.

Si $\{r_1, r_2, r_3\}$ es solución de $z^3 - z^2 - 1 = 0$ entonces

$$\begin{aligned}
(z - r_1)(z - r_2)(z - r_3) &= 0 \\
(z^2 - z(r_1 + r_2) + r_1 r_2)(z - r_3) &= 0 \\
z^3 - z^2(r_1 + r_2) + z r_1 r_2 - r_3 z^2 + z(r_1 + r_2) r_3 - r_1 r_2 r_3 &= 0 \\
z^3 - z^2(r_1 + r_2 + r_3) + z(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3) - r_1 r_2 r_3 &= 0
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{cases}
r_1 + r_2 + r_3 = 1 \\
r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = 0 \\
r_1 r_2 r_3 = 1
\end{cases}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
(z - (r_1 + r_2))(z - (r_1 + r_3))(z - (r_2 + r_3)) &= 0 \\
(z - a)(z - b)(z - c) &= 0 \\
(z^2 - z(a + b) + ab)(z - c) &= 0 \\
z^3 - z^2(a + b) + zab - z^2 c + z(a + b)c - abc &= 0 \\
z^3 - z^2(a + b + c) + z(ab + ac + bc) - abc &= 0 \qquad (5.62)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a + b + c &= (r_1 + r_2) + (r_1 + r_3) + (r_2 + r_3) = 2(r_1 + r_2 + r_3) = 2 \\
ab + ac + bc &= (r_1 + r_2)(r_1 + r_3) + (r_1 + r_2)(r_2 + r_3) + (r_1 + r_3)(r_2 + r_3) \\
&= (1 - r_3)(1 - r_2) + (1 - r_3)(1 - r_1) + (1 - r_2)(1 - r_1) \\
&= (1 - r_2 - r_3 + r_2 r_3) + (1 - r_1 - r_3 + r_1 r_3) \\
&\quad + (1 - r_1 - r_2 + r_1 r_2) \\
&= 3 - 2(r_1 + r_2 + r_3) + (r_2 r_3 + r_1 r_3 + r_1 r_2) \\
&= 3 - 2(1) + 0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
abc &= (r_1 + r_2)(r_1 + r_3)(r_2 + r_3) \\
&= (1 - r_3)(1 - r_2)(1 - r_1) \\
&= (1 - r_2 - r_3 + r_2 r_3)(1 - r_1) \\
&= 1 - r_2 - r_3 + r_2 r_3 - r_1 + r_1 r_2 + r_1 r_3 - r_1 r_2 r_3 \\
&= 1 - (r_1 + r_2 + r_3) + (r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3) - r_1 r_2 r_3 \\
&= 1 - (1) + 0 - (1) \\
&= -1
\end{aligned}
$$

En (5.62)

$$z^3 - 2z^2 + z + 1 = 0$$

Ejercicio 5.50

Calcular

$$\prod_{k=0}^{n-1} (4 + w_k^2)$$

donde $w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ y n es impar

Solución.

$$z^n = 1 \Longrightarrow z^n = 1^{1/n} \Longrightarrow w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

$z^n = 1$ entonces

$$
\begin{aligned}
&z^n - 1 = 0 \\
&z^n - 1 = (z - w_0)(z - w_1)(z - w_2)\cdots(z - w_{n-1}) \qquad (n \text{ factores}) \\
&z^n - 1 = (z - 1)(z - e^{i\frac{2\pi}{n}})(z - e^{i\frac{4\pi}{n}})\cdots(z - e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z = 2i &\Longrightarrow (2i)^n - 1 = (2i - 1)(2i - e^{i\frac{2\pi}{n}})(2i - e^{i\frac{4\pi}{n}})\cdots(2i - e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}) \\
z = -2i &\Longrightarrow (-2i)^n - 1 = (-2i - 1)(-2i - e^{i\frac{2\pi}{n}})(-2i - e^{i\frac{4\pi}{n}})\cdots \\
&\qquad (-2i - e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}})
\end{aligned}
$$

$$\underbrace{((2i)^n - 1)((-2i)^n - 1)}_{(1)} =$$

$$\underbrace{(2i-1)(-2i-1)}_{(2)}\underbrace{(2i - e^{i\frac{2\pi}{n}})(-2i - e^{i\frac{2\pi}{n}})}_{(3)}\underbrace{(2i - e^{i\frac{4\pi}{n}})(-2i - e^{i\frac{4\pi}{n}})}_{(4)}$$

$$\cdots \underbrace{(2i - e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}})(-2i - e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}})}_{(n-2)} \quad (5.63)$$

$$\begin{aligned}(1) &= (2i)^n(-2i)^n - (2i)^n - (-2i)^n + 1\\ &= (-1)^n(2i)^{2n} - (2i)^n - (-1)^n(2i)^n + 1\\ &= -4^n(i^2)^n - (2i)^n + (2i)^n + 1\\ &= 4^n + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) &= -(2i-1)(2i+1)\\ &= -((2i)^2 - 1)\\ &= -(-4-1)\\ &= 4 + (e^{i\frac{0\pi}{n}})^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) &= -(2i - e^{i\frac{2\pi}{n}})(2i + e^{i\frac{2\pi}{n}})\\ &= -((2i)^2 - (e^{i\frac{2\pi}{n}})^2)\\ &= -(-4 - (e^{i\frac{2\pi}{n}})^2)\\ &= 4 + (e^{i\frac{2\pi}{n}})^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4) &= -(2i - e^{i\frac{4\pi}{n}})(2i + e^{i\frac{4\pi}{n}})\\ &= -((2i)^2 - (e^{i\frac{4\pi}{n}})^2)\\ &= -(-4 - (e^{i\frac{4\pi}{n}})^2)\\ &= 4 + (e^{i\frac{4\pi}{n}})^2\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}(n-2) &= -(2i - e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}})(2i + e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}) \\ &= -((2i)^2 - (e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}})^2) \\ &= -(-4 - (e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}})^2) \\ &= 4 + (e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}})^2\end{aligned}$$

Reemplazando en (5.63)

$$4^n + 1 = (4 + (e^{i0})^2)(4 + (e^{i\frac{2\pi}{n}})^2)(4 + (e^{i\frac{4\pi}{n}})^2)\cdots(4 + (e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}})^2)$$

$$4^n + 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(4 + (e^{i\frac{2k\pi}{n}})^2)$$

Ejercicio 5.51

1) Hallar el residuo de

$$\frac{4(x^2-1)^3(x+3)^2}{(x+1)^2(x-1)^2(x-2)}$$

2) Si $P(x) = 16x^{32} + 16x^{16}$ se divide por $D(x) \neq 0$ se obtiene el cociente $Q(x) = 2x^8 + 3$ y residuo $R = 117$. Hallar el mayor coeficiente de $D(x)$.

Solución.
En efecto

1)

$$\begin{aligned}\frac{4(x^2-1)^3(x+3)^2}{(x+1)^2(x-1)^2(x-2)} &= \frac{4(x-1)^3(x+1)^3(x+3)^2}{(x+1)^2(x-1)^2(x-2)} \\ &= \frac{4(x-1)(x+1)(x+3)^2}{x-2} \\ &= \frac{P(x)}{x-2}\end{aligned}$$

$$P(x) = (x-2)Q(x) + R$$
$$P(2) = (2-2)Q(2) + R \Longrightarrow P(2) = R$$

$$P(x) = 4(x-1)(x+1)(x+3)^2$$
$$P(2) = 4(1)(3)(5)^2 = 300 \Longrightarrow R = 300$$

2)

$$P(x) = D(x)Q(x) + R$$

$$\frac{P(x)-R}{Q(x)} = D(x) \Longrightarrow D(x) = \frac{16x^{32}+16x^{16}-117}{2x^8+3}$$
$$\text{haciendo } x^8 = t \Longrightarrow D(t) = \frac{16t^4+16t^2-117}{2t+3}$$

Utilizando división de polinomios se obtiene

$$D(t) = 8t^3 - 12t^2 + 26t - 39$$
$$D(x) = 8x^{24} - 12x^{16} + 26x^8 - 39$$

El mayor coeficiente de $D(x)$ es 26.

Ejercicio 5.52

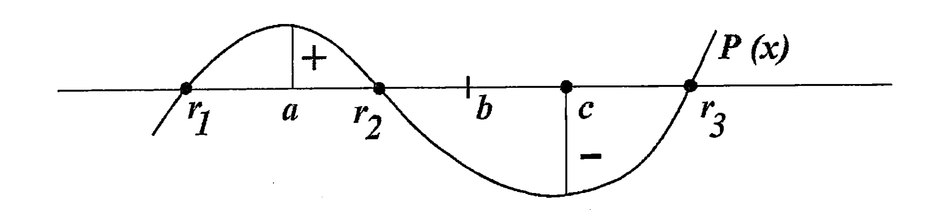
Si

$$P(x) = (x-a)(x-b)(x-c) - \sqrt{A^2}(x-a) - \sqrt{B^2}(x-b) - \sqrt{C^2}(x-c)$$

donde a, b, c, A, B, C son reales. Determinar el número de ceros reales de $P(x)$ si $a < b < c$

Solución.

$$
\begin{aligned}
P(a) &= -\sqrt{B^2}(a-b) - \sqrt{C^2}(a-c) > 0 \text{ puesto que } a-b<0 \text{ y } a-c<0\\
P(b) &= -\sqrt{A^2}(b-a) - \sqrt{C^2}(b-c)\\
P(c) &= -\sqrt{A^2}(c-a) - \sqrt{B^2}(c-b) < 0 \text{ puesto que } c-a>0 \text{ y } c-b>0\\
P(-\infty) &= (-\infty-a)\underset{-}{(-\infty-b)}(-\infty-c) - \sqrt{A^2}\underset{+}{(-\infty-a)}\\
&\quad - \sqrt{B^2}\underset{+}{(-\infty-b)} - \sqrt{C^2}\underset{+}{(-\infty-c)}\\
P(\infty) &= (\infty-a)\underset{+}{(\infty-b)}(\infty-c) - \sqrt{A^2}\underset{-}{(\infty-a)}\\
&\quad - \sqrt{B^2}\underset{-}{(\infty-b)} + \sqrt{C^2}\underset{-}{(\infty-c)}
\end{aligned}
$$



$P(x)$ tiene 3 ceros reales.

Ejercicio 5.53

Sea el polinomio de grado 4

$$P(x) = 12x^4 + ax^3 - 53x^2 + bx + 45,$$

donde $P(-1) = 48$, $P(2) = 105$.

Calcular todos los ceros de $P(x)$

Solución.

$P(x)$	12	a	-53	b	45
-1	12	$a-12$	$-a-41$	$a+b+41$	$-a-b+4=48$
2	12	$a+24$	$2a-5$	$4a+b-10$	$8a+2b+25=105$

$$\left.\begin{array}{r} a+b=-44 \Longrightarrow a+b=-44 \\ 8a+2b=80 \Longrightarrow 4a+b=40 \end{array}\right\} \Longrightarrow a=28,\ b=-72$$

$$P(x)=12x^4+28x^3-53x^2-72x+45$$

$$a_0=45, \quad a_n=42$$

$$c: \pm1, \pm3, \pm5, \pm9, \pm15, \pm45$$

$$d: \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$$

$$\frac{c}{d}: \pm\Big(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{9}{4}, \frac{5}{2}, 3, \frac{15}{4}, \frac{9}{2}, 5, \frac{15}{2}, 9, \frac{45}{4}, 15, \frac{45}{2}, 45\Big)$$

$P(x): N = 2$ ó 0 ceros reales $+$

$P(-x): N = 2$ ó 0 ceros reales $-$

	$P(x)$	12	28	-53	-72	45	
	0	12	28	-53	-72	45	
	1	12	40	-13	-85	-40	
cota sup	2	12	52	51	30	105	
	-1	12	16	-69	-3	48	
	-2	12	4	-61	50	-55	
	-3	12	-8	-29	15	0	$\Longrightarrow$ cero real
cota inf	-4	12	-20	27	-180	765	

$$r \in [-4, 2]$$

$$P(x)=(x+3)(12x^3-8x^2-29x+15)$$

$$Q(x)=12x^3-8x^2-29x+15$$

$$a_0=15, \qquad a_n=12$$

$$\frac{c}{d} : \frac{\text{divisores de } 15}{\text{divisores de } 12}$$

$Q(x)$	12	-8	-29	15
$-\frac{3}{2}$	12	-26	10	0

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x + \frac{3}{2})(12x^2 - 26x + 10) \\ &= (2x + 3)(6x^2 - 13x + 5) \end{aligned}$$

$$T(x) = 6x^2 - 13x + 5$$

$$a_0 = 5, \qquad a_n = 6$$

$$\frac{c}{d} : \frac{\text{divisores de } 5}{\text{divisores de } 6}$$

$T(x)$	6	-13	5
$\frac{5}{3}$	6	-3	0

$$T(x) = (x - \frac{5}{3})(6x - 3)$$

$$T(x) = (3x - 5)(2x - 1)$$

Luego

$$P(x) = (x + 3)(2x + 3)(3x - 5)(2x - 1)$$

5.24 Ejercicios propuestos

1) En la ecuación $x^3 - 2x - 5 = 0$

(a) D.q. existe una raíz real

(b) Calcular la raíz real con un error menor que 10^{-3}

2) Dado el polinomio

$$P(x) = \frac{10}{3}x^5 + 7x^4 + 2x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

(a) Hallar todos las ceros racionales.

(b) Usar el método de Newton para aproximar los ceros irracionales, con unε aproximación de 10^{-4}

3) Sea $P(x) = 2x^5 - x^4 - 8x^3 - 5x^2 - 16x + 40$

(a) Calcular el cero racional.

(b) Calcular los ceros irracionales con un error menor que 10^{-3}

4) Se sabe que $P(x)$ es un polinomio de grado 5 divisible por la primera derivadε $P'(x)$ tal que $P(1) = 0, P(2) = 2$. Determinar $P(x)$

5) Resolver la ecuación:

$$2x^4 - x^3 - 19x^2 - x - 21 = 0$$

Rpta: $\frac{7}{2}, -3, \pm i$

6) Determinar a y b para que el polinomio

$$P(x) = 3x^4 + 7x^3 + ax^2 + 7x + b$$

sea divisible por $3x^2 + 7x - 6$

7) Dada la ecuación polinomial

$$P(x) = 6x^6 - 7x^5 - 22x^4 + 25x^3 + 15x^2 - 23x + 6 = 0$$

(a) Encontrar las raíces racionales, si existen

Rpta: $1, \frac{2}{3}, -\frac{3}{2}$

(b) La raíz real negativa con un error de aproximación de 10^{-4}

Rpta: $r = -1.246$

8) Encontrar todas las raíces de la siguiente ecuación polinomial

$$P(x) = x^6 - 39x^4 - 68x^3 - 5x^2 - 68x + 35 = 0$$

9) Calcular todas las raíces racionales e irracionales con un error de 10^{-3} de la siguiente ecuación polinomial

$$P(x) = 2x^5 - 5x^4 - 22x^3 + 19x^2 + 75x + 36 = 0$$

Rpta: $4, -\frac{3}{2}, 2.491$

10) Calcular las raíces racionales y las raíces irracionales con un error menor de 10^{-4} de la siguiente ecuación polinomial

$$P(x) = 6x^5 - 28x^4 - 26x^3 + 153x^2 + 25x + 140 = 0$$

11) Hallar todas las raíces de la siguiente ecuación

$$\begin{vmatrix} a & a & 2a & 3a \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = 0$$

donde $a = x^3 + 2x - 4$ (las raíces irracionales con una aproximación de 10^{-3})

12) Hallar los ceros del siguiente polinomio

$$P(x) = 6x^6 + 13x^5 - 11x^4 + 8x^3 - 14x^2 - 5x + 3$$

13) Hallar los ceros del siguiente polinomio

$$P(x) = x^4 - \frac{19}{6}x^3 - \frac{97}{18}x^2 + \frac{353}{18}x - \frac{35}{6}$$

Rpta: $3, -\frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{1}{3}$

14) Encontrar todas las raíces reales y las raíces irracionales con una aproximación de 10^{-3} de la ecuación polinomial

$$P(x) = 20x^5 + 39x^4 - 3x^3 + 38x^2 - 2x - 2 = 0$$

15) Sea $P(x) = x^n + ax^{n-m} + b,\ a, b \in \mathbb{R}$ un polinomio de grado n y sea r un cero de $P(x)$

(a) Si $r \neq 0$, cuál es la multiplicidad de r.

(b) Si $r = 0$, cuál es la multiplicidad de r

16) Averiguar la multiplicidad del cero x_0 del polinomio

$$P(x) = \left(\frac{x - x_0}{2}\right)(f'(x) + f'(x_0) - f(x) + f(x_0))$$

17) El polinomio con coeficientes enteros

$$P(x) = 8x^4 + ax^3 + 13x^2 + cx - 6$$

con $a < 0, c < 0$ tiene dos raíces racionales cuya suma es mayor que 1 y dos raíces complejas. Una de las raíces reales se encuentra en el intervalo $\langle 1, 2 \rangle$. Encontrar todos los ceros del polinomio $P(x)$.

Rpta: $a = -10, c = -20, \frac{3}{2}, -\frac{1}{4}, \pm\sqrt{2}i$

18) Para qué valores de m, $P(x) = (x+1)^m + x^m + 1$ es divisible por $D(x) = x^2 + x + 1$

19) Sea

$$P(x) = 36x^5 + 24x^4 + 55x^3 - 28x^2 - 9x + 2$$

Hallar todos los ceros de $P(x)$

Rpta: $-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i$

20) Hallar todos los ceros del polinomio $P(x)$ con un error de aproximación de 10^{-4} cuando

$$P(x) = 6x^5 + 7x^4 - 10x^3 - 44x^2 - 39x - 10$$

21) Si $A = m - n$,

$$P(x) = -nx^{m+n+1} + nx^{m+n} + mx^{n+1} + Ax^{m+1} - mx^n - Ax^m - 2Ax + 2A$$

$r = 1$ es un cero de $P(x)$. Calcular la multiplicidad de r

Rpta: $k = 2$

22) Sea

$$P(x) = 3x^6 - 19x^5 + 54x^4 - 88x^3 + 57x^2 + 19x - 10$$

Encontrar todos los ceros de $P(x)$ si $1 + 2i$ es un cero de $P(x)$

23) Hallar todos los ceros de

$$P(x) = 24x^5 - 26x^4 - 59x^3 + 19x^2 - 83x + 45$$

Rpta: $\frac{9}{4}, -\frac{5}{3}, \frac{1}{2}, \pm i$

24) Dadas las funciones polinomiales

$$P(x) = (x-1)^{3m} - (x-1)^{3n+1} + (x-1)^{3p+1}$$
$$D(x) = x^2 - 3x + 3$$

Bajo que condiciones $P(x)$ es divisible por $D(x)$

25) Encontrar todos los ceros de la siguiente función polinomial

$$P(x) = 24x^5 + 14x^4 - 87x^3 - 171x^2 - 161x - 60$$

Rpta: $\frac{5}{2}, -\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

26) Si el número complejo i es un cero de

$$P(x) = 120x^6 - 166x^5 - 203x^4 - 48x^3 - 288x^2 + 118x + 35$$

Encontrar todos los ceros de $P(x)$

27) (a) Determinar a y b para que el polinomio

$$P(x) = 6x^5 + 23x^4 + ax^3 + 5x^2 + 9x + b$$

sea divisible por $(3x^2 + 7x - 6)$

Rpta: $a = 15,\ b = -18$

(b) Encontrar todos los ceros de $P(x)$

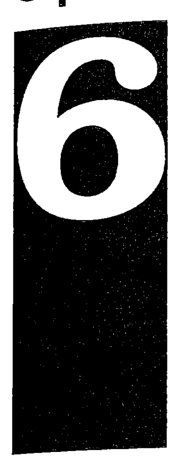
Rpta: $-3, \frac{2}{3}, -\frac{3}{2}, \pm i$

28) Dados los polinomios, donde $m \in \mathbb{Z}^+$

$$P(x) = (x+2)^m - (x+1)^m - 1$$
$$D(x) = x^2 + 3x + 3$$

Para qué valores de m, $P(x)$ es divisible por $D(x)$

Capítulo



ESPACIOS VECTORIALES

Este es un momento apropiado para abordar el tema de los vectores con mayor amplitud, por ello es necesario generalizar la noción de "vector de n componentes" visto en el Capítulo 4.

Uno de los principales éxitos matemáticos del siglo XX ha sido llegar al conocimiento de que existen muchos conjuntos (además de $\mathbb{R}^n$ y las matrices) que satisfacen las mismas propiedades, es por ello que surge la idea de dotarles de una estructura unificamente que hizo posible la creación de una nueva noción matemática, que es la de "espacio vectorial".

Los espacios vectoriales constituyen el fundamento del Álgebra Lineal y en este contexto se han sintetizado varios aspectos fundamentales de matemáticas y otras disciplinas.

De este modo se ha dado un salto, aparentemente muy grande, desde el entorno concreto de los vectores fácilmente visualizables hasta el entorno abstracto de los espacios vectoriales arbitrarios, incluyéndose a muchas nuevas clases de vectores.

Definición 6.1

Un **espacio vectorial sobre** $\mathbb{R}$ (espacio vectorial real) denotado por V, es un conjunto de objetos, denominados **vectores**, provisto de dos operaciones de **adición** y **multiplicación por un escalar** y que satisfacen las siguientes

propiedades:

1) $\bar{x}+\bar{y}\in V;\ \forall\bar{x},\bar{y}\in V$ (cerradura de la adición)

2) $\bar{x}+\bar{y}=\bar{y}+\bar{x};\ \forall\bar{x},\bar{y}\in V$ (Prop. conmutativa de la adición)

3) $\bar{x}+(\bar{y}+\bar{z})=(\bar{x}+\bar{y})+\bar{z};\ \forall\bar{x},\bar{y},\bar{z}\in V$ (Prop. asociativa de la adición)

4) $\exists\,\bar{0}\in V/\bar{x}+\bar{0}=\bar{0}+\bar{x}=\bar{x},\ \forall\bar{x}\in V$ ($\bar{0}$ elemento neutro para la suma)

5) $\forall\bar{x}\in V,\exists-\bar{x}\in V/\bar{x}+(-\bar{x})=\bar{0}$ ($-\bar{x}$ inverso aditivo de $\bar{x}$)

6) $r\bar{x}\in V,\forall r\in\mathbb{R},\forall\bar{x}\in V$ (cerradura de la multiplicación por un escalar)

7) $r(\bar{x}+\bar{y})=r\bar{x}+r\bar{y},\forall r\in\mathbb{R},\forall\bar{x},\bar{y}\in V$ (1ª prop. de la distribución)

8) $(r+t)\bar{x}=r\bar{x}+t\bar{x},\forall r,t\in\mathbb{R},\forall\bar{x}\in V$ (2ª prop. de la distribución)

9) $r(t\bar{x})=(rt)\bar{x},\forall r,t\in\mathbb{R},\forall\bar{x}\in V$ (Prop. asociativa de la multiplicación por un escalar)

10) $1\bar{x}=\bar{x},\forall\bar{x}\in V$ (1 identidad multiplicativa)

Nota

La definición se refiere a un **espacio vectorial sobre** $\mathbb{R}$, esto significa que los escalares empleados son números reales, igualmente se puede definir un **espacio vectorial sobre** $\mathbb{C}$, empleando números complejos en lugar de números reales.

Ejemplo 6.1

$V=\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)/x_i\in\mathbb{R},i=1,2,\ldots,n\}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, si el conjunto de escalares se toma sobre $\mathbb{R}$.

Ejemplo 6.2

$V=\{\bar{0}\}$ es un espacio vectorial. Se llama **espacio vectorial trivial** o **espacio vectorial cero**

Ejemplo 6.3

$V = \{1\}$ no es un espacio vectorial pues $1 + 1 = 2 \notin V$ (hay otra propiedad que tampoco satisface) basta que falle una propiedad para que no sea espacio vectorial.

Ejemplo 6.4

$V = \{(x, y)/y = mx$ donde m es un número real fijo, $x \in \mathbb{R}\}$ es un espacio vectorial. Representa V un conjunto de puntos del plano situados sobre una recta que pasa por el origen

Para demostrar que V es un espacio vectorial se debe comprobar que satisface las 10 propiedades.

1) Sean $\bar{u} = (x_1, mx_1), \bar{v} = (x_2, mx_2)$ elementos de V

$$\begin{aligned} \bar{u} + \bar{v} &= (x_1, mx_1) + (x_2, mx_2) \\ &= (x_1 + x_2, m(x_1 + x_2)) \in V \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \bar{u} + \bar{v} &= (x_1, mx_1) + (x_2, mx_2) \\ &= (x_1 + x_2, mx_1 + mx_2) \\ &= (x_2 + x_1, mx_2 + mx_1) \\ &= (x_2, mx_2) + (x_1, mx_1) \\ &= \bar{v} + \bar{u} \end{aligned}$$

3) Si $\bar{w} = (x_3, mx_3) \in V$

$$\begin{aligned} \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) &= (x_1, mx_1) + [(x_2, mx_2) + (x_3, mx_3)] \\ &= (x_1, mx_1) + (x_2 + x_3, m(x_2 + x_3)) \\ &= (x_1 + (x_2 + x_3), mx_1 + m(x_2 + x_3)) \\ &= ((x_1 + x_2) + x_3, m(x_1 + x_2) + mx_3) \\ &= ((x_1 + x_2, m(x_1 + x_2)) + (x_3, mx_3) \\ &= (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} \end{aligned}$$

4) Sea $\bar{0} = (0,0) = (0, m0) \in V$ entonces:

$$\begin{aligned} \bar{u} + \bar{0} &= (x_1, mx_1) + (0, m0) \\ &= (x_1 + 0, mx_1 + m(0)) \\ &= (x_1 + 0, m(x_1 + 0)) \\ &= (x_1, mx_1) \\ &= \bar{u} \end{aligned}$$

5) Si $\bar{u} = (x_1, mx_1), -\bar{u} = (-x_1, -mx_1)$ entonces

$$\begin{aligned} \bar{u} + (-\bar{u}) &= (x_1, mx_1) + (-x_1, -mx_1) \\ &= (x_1 - x_1, mx_1 - mx_1) \\ &= (0,0) \\ &= \bar{0} \end{aligned}$$

6)

$$\begin{aligned} r\bar{u} &= r(x_1, mx_1) = (rx_1, rmx_1) \\ &= (rx_1, m(rx_1)) \in V, \forall r \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

7)

$$\begin{aligned} r(\bar{u} + \bar{v}) &= r(x_1 + x_2, m(x_1 + x_2)) \\ &= (r(x_1 + x_2), rm(x_1 + x_2)) \\ &= (rx_1, rmx_1) + (rx_2, rmx_2) \\ &= r(x_1, mx_1) + r(x_2, mx_2) \\ &= r\bar{u} + r\bar{v}, \forall r \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

8)

$$\begin{aligned} (r + t)\bar{u} &= (r + t)(x_1, mx_1) \\ &= ((r + t)x_1, (r + t)mx_1) \\ &= (rx_1 + tx_1, rmx_1 + tmx_1) \end{aligned}$$

$$= (rx_1, rmx_1) + (tx_1, tmx_1)$$
$$= r(x_1, mx_1) + t(x_1, mx_1)$$
$$= r\bar{u} + t\bar{u}, \forall r, t \in \mathbb{R}$$

9)

$$r(t\bar{u}) = r(tx_1, m(tx_1)), \forall t, r \in \mathbb{R}$$
$$= rt(x_1, mx_1)$$
$$= (rt)\bar{u}$$

10)

$$1\bar{u} = 1(x_1, mx_1) = (1(x_1), 1(mx_1)) = (x_1, mx_1) = \bar{u}$$

Se cumplen las 10 propiedades entonces el conjunto de puntos que se encuentran sobre una línea recta que pasa por el origen si es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Nota

Verificar las 10 propiedades puede ser una tarea muy laboriosa. En adelante solo se comprobará aquellas propiedades que aparentamente son inmediatamente obvias.

Ejemplo 6.5

$V = \{(x, y)/y = 7x - 3, x \in \mathbb{R}\}$ no es un espacio vectorial se trata de una recta que no pasa por el origen no cumple la propiedad 1. En efecto:
Si $\bar{u} = (x_1, y_1)$ y $\bar{v} = (x_2, y_2) \in V$ entonces $\bar{u} + \bar{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, si este vector estuviera en V tendríamos

$$y_1 + y_2 = 7(x_1 + x_2) - 3 = 7x_1 + 7x_2 - 3 \tag{6.1}$$

pero $y_1 = 7x_1 - 3, y_2 = 7x_2 - 3$ entonces

$$y_1 + y_2 = 7x_1 + 7x_2 - 6 \tag{6.2}$$

se nota que (6.1)$\neq$(6.2)

Nota

Otra forma más fácil de demostrar V que no es un espacio vectorial consiste observar que $(0,0) \notin V$ puesto que $0 \neq 7(0) - 3$.

Ejemplo 6.6

$V = \{(x, y, z)/ax + by + cz = 0\}$ es un espacio vectorial, representa V conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ situados sobre un plano que pasa por el origen.] efecto:
Probando la Propiedad 1

$$\bar{u} = (x_1, y_1, z_1),\ \bar{v} = (x_2, y_2, z_2) \in V \Longrightarrow \bar{u}+\bar{v} = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$$

puesto que

$$\begin{aligned} a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) + c(z_1 + z_2) &= (ax_1 + by_1 + cz_1) \\ &\quad + (ax_2 + by_2 + cz_2) \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

y así sucesivamente se pueden probar las 10 propiedades.

Ejemplo 6.7

$V = \mathbb{P}_n = \{$Conjunto de los polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes reale es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.
Si $p(x) \in \mathbb{P}_n$ entonces

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \ldots, n$.
La suma $p(x) + q(x)$ se define así:
Si $q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ entonces

$$p(x)+q(x) = (a_n+b_n)x^n + (a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1+b_1)x + (a_0+b_{(}$$

es otro polinomio de grado $\leq n$. Luego satisface la propiedad 1. Las propiedad 2 y 3 y de la 6 a la 10 se satisfacen.

Veamos las otras propiedades:

Propiedad 4

El **polinomio cero** se define como

$$0 = 0x^n + 0x^{n-1} + \cdots + 0x + 0$$

entonces es obvio que

$$0 \in \mathbb{P}_n \text{ y } p(x) + 0 = p(x) \quad \forall p(x) \in \mathbb{P}_n$$

Propiedad 5

Si $-p(x) = -a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_1 x - a_0$

$$p(x) + (-p(x)) = p(x) - p(x) = 0$$

Entonces queda probado que $\mathbb{P}_n$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$

Ejemplo 6.8

$V = C[0,1] = \{$Conjunto de funciones continuas de valor real definidas en $[0,1]\}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Las operaciones de adición y multiplicación por escalares se definen

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(rf)(x) = r(f(x))$$

La propiedad 1 se cumple puesto que la suma de funciones continuas es continua

Con $0 = 0(x)$ =función cero,

$$(f+0)(x) = f(x) + 0(x) = f(x) + 0 = f(x) \; \forall x \in [0,1]$$

y $(-f)(x) = -f(x)$ entonces

$$f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) = (f-f)(x) = 0(x) = 0 \; \forall x \in [0,1]$$

entonces $C[0,1]$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Ejemplo 6.9

$V = C'[a,b] =$ {Conjunto de funciones con primera derivada continua en $[a, b$ constituye también un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, con las operaciones de adició y multiplicación por escalares

$$D(f+g) = Df + Dg$$
$$D(rf) = r(Df), \ \forall r \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 6.10

$V = \mathbb{M}_{23} =$ {Conjunto de las matrices de orden 2×3 con elementos reales}
Si la suma de matrices y la multiplicación de una matriz por un escalar son l operaciones usuales es fácil comprobar que $\mathbb{M}_{23}$ es un espacio vectorial siendo la matriz cero de orden 2×3.
Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{23}$ entonces $-A = (-a_{ij}) \in \mathbb{M}_{23}$

Ejemplo 6.11

$V = \mathbb{M}_{mn} =$ {Conjunto de las matrices de orden $m \times n$ con elementos reale forma un espacio vectorial para cualesquiera enteros positivos m y n.

Ejemplo 6.12

$\mathbb{M}_{nn} =$ {Conjunto de las matrices cuadradas de orden n con elementos reale también es un espacio vectorial para cualquier entero positivo n, con las usu les operaciones de adición y multiplicación por escalares.

Ejemplo 6.13

$\mathbb{C} = \{z = x + yi / x, y \in \mathbb{R}\}$ el conjunto de los números complejos es ι espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones de adición de elementos de $\mathbb{C}$ multiplicación de elementos de $\mathbb{C}$ por un número real.

Ejemplo 6.14

$\mathbb{N}_3 =$ {Conjunto de matrices invertibles de orden 3} $\subset \mathbb{M}_{33}$ se define la sur como $A + B = AB$.

Veamos si cumple la propiedad 1

Si A y B son matrices invertibles entonces AB es invertible, pero $AB = A + B$ luego $A + B \in \mathbb{N}_3$

Propiedad 2. Si A y B son matrices invertibles entonces

$$\left.\begin{array}{l} A + B = AB \\ B + A = BA \end{array}\right\} \Longrightarrow A + B \neq B + A$$

no cumple la propiedad conmutativa para la suma

Por tanto $\mathbb{N}_3$ no es un espacio vectorial.

Cabe anotar en este caso que, el elemento neutro para la suma es I_3 puesto que

$$A + I = AI = A \; \forall A \in \mathbb{N}_3$$

y además $-A = A^{-1}$ ya que $A + (-A) = A(-A) = AA^{-1} = I$.

Ejemplo 6.15

$V = \{(x, y)/y \leq 0\}$ es el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ que se hallan en el semiplano inferior (III y IV cuadrantes)

Sean $\bar{u} = (x_1, y_1), y_1 \leq 0$ y $\bar{v} = (x_2, y_2), y_2 \leq 0$ elementos de V entonces

$$\bar{u} + \bar{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), y_1 + y_2 \leq 0 \Longrightarrow \bar{u} + \bar{v} \in V$$

cumple la propiedad 1

Sin embargo V no es un espacio vectorial, puesto que $(1, -1)$ no tiene inverso aditivo en V ya que $(-1, 1) \notin V$, además falla la propiedad 6 puesto que si $(x, y) \in V$ entonces $r(x, y) \notin V$ si $r \in \mathbb{R}^-$

El siguiente teorema demuestra algunas propiedades elementales relacionadas a los espacios vectoriales.

Teorema 6.1

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Entonces:

1) $r\bar{0} = \bar{0} \; \forall r \in \mathbb{R}$ y $\bar{0} \in V$

2) $0\bar{x} = \bar{0}\ \forall \bar{x} \in V$

3) Si $r\bar{x} = \bar{0}$ entonces $r = 0$ ó $\bar{x} = \bar{0}$ (o ambas cosas a la vez)

4) $(-1)\bar{x} = -\bar{x},\ \forall \bar{x} \in V$

Demostración. 1)

$$\begin{aligned}
\bar{0} + \bar{0} &= \bar{0} && \text{(Prop 4)} \\
r(\bar{0} + \bar{0}) &= r\bar{0} && \text{(Prop 6)} \\
r\bar{0} + r\bar{0} &= r\bar{0} && \text{(Prop 7)} \\
(r\bar{0} + r\bar{0}) - r\bar{0} &= r\bar{0} - r\bar{0} \\
r\bar{0} + (r\bar{0} - r\bar{0}) &= r\bar{0} - r\bar{0} \\
r(\bar{0}) + \bar{0} &= \bar{0} \\
r\bar{0} &= \bar{0}
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
0 &= 0 + 0 \\
0\bar{x} &= (0 + 0)\bar{x} \\
0\bar{x} &= 0\bar{x} + 0\bar{x} && \text{(Prop 7)} \\
0\bar{x} + (-0\bar{x}) &= (0\bar{x} + 0\bar{x}) + (-0\bar{x}) \\
\bar{0} &= 0\bar{x} + (0\bar{x} - 0\bar{x}) \\
\bar{0} &= 0\bar{x}
\end{aligned}$$

3) Sea $r\bar{x} = \bar{0}$

Si $r \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}(r\bar{x}) &= \frac{1}{r}(\bar{0}) \\
1\bar{x} &= \bar{0} \\
\bar{x} &= \bar{0} && \text{(Prop 10)}
\end{aligned}$$

Si $r = 0$ entonces $r\bar{x} = \bar{0}$

Si $r = 0$ y $\bar{x} = 0$ entonces $r\bar{x} = \bar{0}$

4) Para demostrar que $(-1)\bar{x} = -\bar{x}$ es necesario demostrar que $\bar{x} + (-1)\bar{x} = \bar{0}$

Veamos

$$\begin{aligned} \bar{x} + (-1)\bar{x} &= 1\bar{x} + (-1)\bar{x} \\ &= (1 + (-1))\bar{x} \\ &= 0\bar{x} = \bar{0} \end{aligned}$$

◇

6.1 Ejercicios propuestos

Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son espacios vectoriales con las operaciones de adición y multiplicación por escalares definidas. De lo contrario indicar qué propiedades no se cumplen.

$A = \{\bar{u} = (x, y, z)/x, y, z \in \mathbb{R}\}$ con las operaciones

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 + \bar{u}_2 &= (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ r\bar{u} &= r(x, y, z) = (x, y, rz) \end{aligned}$$

Rpta: A no es espacio vectorial. Falla la propiedad 8

$B = \{\bar{u} = (x, y, z)/x, y, z \in \mathbb{R}\}$ con las operaciones

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 + \bar{u}_2 &= (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ r\bar{u} &= r(x, y, z) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

$C = \{\bar{a} = (x, y)/x, y \in \mathbb{R}\}$ con las operaciones

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 + \bar{a}_2 &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2) + (x_2, y_2) \\ r\bar{a} &= (-rx, -ry) \end{aligned}$$

Rpta: C no es espacio vectorial. Fallan las propiedades 9 y 10

$D = \{\bar{b} = (x, x, \ldots, x), x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$ con las operaciones

$$\bar{b}_1 + \bar{b}_2 = (x, x, \ldots, x) + (y, y, \ldots, y) = (x + y, x + y, \ldots, x + y)$$
$$r\bar{b} = r(x, x, \ldots, x) = (rx, rx, \ldots, rx)$$

$E = \{x > 0/x \in \mathbb{R}\}$ con las operaciones

$$x + y = xy$$
$$rx = x^r$$

Rpta: E es un espacio vectorial

$F = \{\bar{u} = (x, y)/x, y \in \mathbb{R}\}$ con las operaciones

$$\bar{u}_1 + \bar{u}_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2 + 1)$$
$$r\bar{u} = r(x, y) = (rx, ry)$$

$G = \{$El conjunto cuyo único elemento es María$\}$ con las operaciones

$$\text{María} + \text{María} = \text{María}$$
$$r\text{María} = \text{María}$$

Rpta: G es un espacio vectorial

$H = \left\{M = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathbb{M}_{22}$ con las operaciones

$$M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 2 \\ 2 & b_1 + b_2 \end{pmatrix}$$
$$rM = r\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra & r \\ r & rb \end{pmatrix}$$

$J = \left\{M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \Big/ a, b \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathbb{M}_{22}$ con las operaciones

$$M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rM = r\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ra \\ rb & 0 \end{pmatrix}$$

Rpta: J es un espacio vectorial

$M = \left\{ A = \begin{pmatrix} a+b & a \\ b & a+b \end{pmatrix} \Big/ a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{M}_{22}$ con las operaciones

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_1 \\ b_1 & a_1+b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2+b_2 & a_2 \\ b_2 & a_2+b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a_1+a_2)+(b_1+b_2) & a_1+a_2 \\ b_1+b_2 & (a_1+a_2)+(b_1+b_2) \end{pmatrix}$$

$$rA = r\begin{pmatrix} a+b & a \\ b & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(a+b) & ra \\ rb & r(a+b) \end{pmatrix}$$

$C^{\infty}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/f$ es derivable infinitas veces y con derivadas continuas$\}$ con las operaciones

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(rf)(x) = rf(x)$$

Rpta: $C^{\infty}(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial

$N = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Big/ a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ con las operaciones

$$A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = B$$

$$rA = r\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{pmatrix}$$

6.2 Subespacios vectoriales

Algunas veces, sucede que un espacio vectorial es un entorno demasiado grande para un determinado problema propuesto, en el sentido que contiene más

vectores de los necesarios. En consecuencia, estamos interesados entonces e: un subconjunto del espacio vectorial (con menos vectores) que hereda las misma propiedades del espacio original. Entonces, es muy interesante saber distingui qué subconjuntos de un espacio vectorial son de nuevo subespacios vectoriales.

De hecho, todos los espacios vectoriales tienen subconjuntos que también so espacios vectoriales.

Si V es un espacio vectorial, entonces determinados subconjuntos de V constitu yen por sí solos espacios vectoriales bajo las operaciones de adición de vectore y multiplicación de vectores por un escalar, definidas en V.

Definición 6.2

Un subconjunto S de un espacio vectorial V es un **subespacio de** V, si S es poı sí solo un espacio vectorial bajo las operaciones de adición y multiplicación poı un escalar definidas en V.

Nota

Esta definición nos conduce a pensar que el subespacio S, hereda las operacione y propiedades del espacio vectorial progenitor V

Ejemplo 6.16

Sabemos que $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)/x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ es un espacio vectc rial. En el Ejemplo 6.4 Sección 6.1, demostramos que $V = \{(x, y)/y = mx$, donde m es un número real fijo y $x \in \mathbb{R}\}$ es un espacio vectorial. Es cla ro que $V \subset \mathbb{R}^2$. Es decir $\mathbb{R}^2$ tiene un subconjunto V que es a su vez un espaci vectorial.

Ejemplo 6.17

Las rectas y los planos que pasan por el origen son subespacios de $\mathbb{R}^3$ (ver Ejen plos 6.4, 6.6 Sección 6.1)

El siguiente teorema nos proporciona un método que hace relativamente fácil de terminar si un subconjunto S es o no, un subespacio de V.

Teorema 6.2

Un subconjunto no vacío S del espacio vectorial V es un **subespacio de** V si y solo si

1) $\bar{x} + \bar{y} \in S, \ \forall \bar{x} \in S, \ \forall \bar{y} \in S$

2) $r\bar{x} \in S, \ \forall \bar{x} \in S, \ \forall r \in \mathbb{R}$

Nota

La Condición 1 indica que S es **cerrado bajo la adición** y la Condición 2 indica que S es **cerrado bajo la multiplicación por un escalar**.

Demostración. ($\Rightarrow$) Si S es un subespacio de V entonces satisface todas las propiedades de espacio vectorial, en particular cumple con las propiedades 1 y 6 que son precisamente las condiciones 1 y 2 del Teorema 6.2.
($\Leftarrow$) Supongamos que se cumplen las condiciones 1 y 2. Dado que estas condiciones son las propiedades 1 y 6 de espacio vectorial, solamente falta demostrar que S satisface las otras 8 propiedades.
Los vectores en S satisfacen de hecho las propiedades 2,3,7,8,9 y 10 ya que todos los vectores en V las satisfacen. Luego, para completar la demostración, solo falta verificar que S satisface las propiedades 4 y 5
Si $\bar{x} \in S$ entonces $r\bar{x} \in S, \forall r \in \mathbb{R}$ (por condición 2)

4) Si $r = 0$ entonces $0\bar{x} = \bar{0} \in S$ y $\bar{x} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{x} = \bar{x}, \ \forall \bar{x} \in S$

5) Si $r = -1$ entonces $(-1)\bar{x} = -\bar{x} \in S$ y $\bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{x} - \bar{x} = \bar{0}, \ \forall \bar{x} \in S$

Por tanto S es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. ◇

Nota

1) Este teorema ahorra mucho trabajo innecesario. Puesto que si $S \neq \emptyset$ y $S \subset V$ entonces S es un subespacio de V si y solo si se cumplen las dos condiciones de cerradura

2) Todo subespacio no vacío de un espacio vectorial V contiene al vector $\bar{0}$ (El

vector $\bar{0}$ en S es el mismo vector $\bar{0}$ de V) Este resultado facilitará ver que un subconjunto de V no es un subespacio de V. Es decir, si un subconjunto de V no contiene el $\bar{0}$ de V entonces no es subespacio de V.

Definición 6.3

Todo espacio vectorial V tiene al menos dos subespacios

1) $V \subset V$ es un subespacio de sí mismo y

2) $\{\bar{0}\} \subset V$ es un subespacio de V (consiste únicamente del vector $\bar{0}$ de V) V y $\{\bar{0}\}$ se denominan **subespacios triviales** de V.

Definición 6.4

Todos los subespacios de V que no sean V y $\{\bar{0}\}$ se llaman **subespacios propios** de V

Veamos algunos ejemplos de subespacios propios.

Ejemplo 6.18

$S = \{(x, y)/y = mx\} \subset \mathbb{R}^2$ es un subespacio propio de $\mathbb{R}^2$ (S es el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ situados sobre una recta que pasa por el origen)

Ejemplo 6.19

$S = \{(x, y, z)/x = at, y = bt, z = ct,\ a, b, c, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ es un subespacio propio de $\mathbb{R}^3$
(S es el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ situados sobre una recta que pasa por el origen

Ejemplo 6.20

$\mathscr{P} = \{(x, y, z)/ax + by + cz = 0,\ a, b, c \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ es un subespacio propio de $\mathbb{R}^3$ ($\mathscr{P}$ es el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ situados sobre un plano que pasa por el origen)

Ejemplo 6.21

Si M_{22} = {espacio de las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes reales}
$S = \{A \in \mathbb{M}_{22}/a_{ij} = 0,\ i \neq j\} \subset \mathbb{M}_{22}$

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \in S$$

$$rA = \begin{pmatrix} ra_{11} & r0 \\ r0 & ra_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_{11} & 0 \\ 0 & ra_{22} \end{pmatrix} \in S;\ \forall r \in \mathbb{R}$$

entonces S es un subespacio propio de $\mathbb{M}_{22}$.

Ejemplo 6.22

$\mathbb{P}_n[0, 1]$ = {Conjunto de los polinomios de grado $\leq n$, definidos en [0, 1]}
$\mathbb{P}_n[0, 1] \subset \mathcal{C}[0, 1]$ puesto que todo polinomio es continuo y $\mathbb{P}_n$ es un espacio vectorial $\forall n \in \mathbb{Z}^+$
entonces $\mathbb{P}_n[0, 1]$ es un subespacio propio de $\mathcal{C}[0, 1]$ (Ver Ejemplos 6.7 y 6.8 Sección 6.1)

Ejemplo 6.23

$\mathbb{P}_n$ = {Conjunto de los polinomios de grando $\leq n$ con coeficientes reales}
Si $0 \leq m < n$ entonces fácilmente se puede probar que $\mathbb{P}_m$ es un subespacio propio de $\mathbb{P}_n$ (Ver Ejemplo 6.7)

Ejemplo 6.24

$\mathcal{C}'[0, 1]$ = {Conjunto de funciones con primera derivada continua en [0,1]}
Como toda función derivable es continua, se tiene que $\mathcal{C}'[0, 1] \subset \mathcal{C}[0, 1]$.
Debido a que la suma y los múltiplos escalares de dos funciones derivables son derivables se define en $\mathcal{C}'[0, 1]$

$$D(f + g) = Df + Dg$$

$$D(rf) = r(Df),\ \forall r \in \mathbb{R}$$

$C'[0,1]$ es un subespacio propio de $C[0,1]$ puesto que no toda función continua es derivable.

Nota

No todo espacio vectorial tiene subespacios propios.

Ejemplo 6.25

$\mathbb{R}$ no tiene subespacio propio. En efecto

Si $S \neq \{0\}$ entonces S contiene un número real $x \neq 0$ y $(\frac{1}{x})x = 1$ (propiedad 6)

y $y(1) = y \in S \ \forall y \in \mathbb{R}$ (propiedad 10)

Por tanto $S = \mathbb{R}$, es decir $\mathbb{R}$ no tiene subespacio propio.

Ejemplo 6.26

Si $M_{nn} =$ {espacio de las matrices cuadradas de orden n con elementos reales}

$S = \{A \in \mathbb{M}_{nn} / A$ es invertible$\} \subset M_{nn}$ no es subespacio de $\mathbb{M}_{nn}$ ya que la matriz O no está en S.

Nota

1) Se puede apreciar que un espacio vectorial puede tener cantidad y variedad de subespacios propios.

2) Si S_1 y S_2 son subespacios de un espacio vectorial V entonces $S_1 \cap S_2 \neq$ (puesto que $\{\bar{0}\} \subset S_1 \cap S_2$

Teorema 6.3

Si S_1 y S_2 son subespacios de un espacio vectorial V entonces $S_1 \cap S_2$ es un subespacio de V.

Demostración. 1) Tomemos dos elementos $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2 \in S_1 \cap S_2$ entonces

$$\bar{x}_1 \text{ y } \bar{x}_2 \in S_1 \Longrightarrow \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \in S_1 \text{ (puesto que } S_1 \text{ es un subespacio de } V)$$

$$\text{y } \bar{x}_1 \text{ y } \bar{x}_2 \in S_2 \Longrightarrow \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \in S_2 \text{ (puesto que } S_2 \text{ es un subespacio de } V)$$

por tanto $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \in S_1 \cap S_2$.

2) Tomemos un elemento $\bar{x} \in S_1 \cap S_2$ entonces

$$\left.\begin{aligned} \text{Si } \bar{x} \in S_1 &\Longrightarrow r\bar{x} \in S_1; \forall r \in \mathbb{R} \\ \text{y } \bar{x} \in S_2 &\Longrightarrow r\bar{x} \in S_2; \forall r \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow r\bar{x} \in S_1 \cap S_2, \ \forall r \in \mathbb{R}$$

Puesto que ambas condiciones de cerradura se cumplen entonces $S_1 \cap S_2$ es un subespacio de V

◇

Ejemplo 6.27

En $\mathbb{R}^3$ tomemos dos subespacios:

$$S_1 = \{(x, y, z)/x + 2y - 3z = 0\}$$
$$S_2 = \{(x, y, z)/3x - y - 2z = 0\}$$

entonces S_1 y S_2 representan planos que pasan por el origen y son subespacios de $\mathbb{R}^3$ (ver Ejemplo 6.20) además $S_1 \cap S_2 = L$ (una recta). Calculamos $S_1 \cap S_2$ que se reduce a resolver el SHEL

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - y - 2z = 0 \end{aligned}\right\} \ AX = O$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = E_A$$

$r(A) = 2 < n$ entonces existe $n - 2 = 1$ incógnita arbitraria

$$z = t, \qquad y = z = t, \qquad x = -2y + 3z = t$$

$S = \{t, t, t\}; \forall t \in \mathbb{R}$

$L = \{(0, 0, 0) + t(1, 1, 1)/t \in \mathbb{R}\} = S_1 \cap S_2$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$

Nota

En general si S_1 y S_2 son subespacios de V entonces $S_1 \cup S_2$ no es necesariamente un subespacio de V (puede o no serlo)

Por ejemplo, tomemos dos subespacios de $\mathbb{R}^2$

$$S_1 = \{(x, y)/y = -5x\}$$
$$S_2 = \{(x, y)/y = 9x\}$$

$S_1 \cup S_2$ no es subespacio de $\mathbb{R}^2$. veamos:
$(1, -5) \in S_1$ y $(1, 9) \in S_2$ entonces $\{(1, -5), (1, 9)\} \subset S_1 \cup S_2$. Sin embargo $(1, -5) + (1, 9) = (2, 4) \notin S_1 \cup S_2$ ya que $(2, 4) \notin S_1$ y $(2, 4) \notin S_2$, luego $S_1 \cup S_2$ no es cerrado ante la adición, y por tanto $S_1 \cup S_2$ no es subespacio de $\mathbb{R}^2$.

6.3 Ejercicios propuestos

1) Demostrar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios de $\mathbb{R}^3$.

   (a) $A = \{(0, 0, c)/c \in \mathbb{R}\}$

   Rpta: Subespacio de $\mathbb{R}^3$

   (b) $B = \{(a, b, c)/b = a + c + 1\}$

   (c) $C = \{(a, b, c)/b = a + c\}$

   Rpta: Subespacio de $\mathbb{R}^3$

2) Demostrar cuáles de los siguientes conjuntos de $\mathbb{M}_{22}$ son subespacios de $\mathbb{M}_{22}$

   (a) $D = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Big/ a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$

   Rpta: No es subespacio de $\mathbb{M}_{22}$

   (b) $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Big/ b + c = 0 \right\}$

   (c) $F = \{A/A = A^T\}$

   Rpta: Subespacio de $\mathbb{M}_{22}$

3) Demostrar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{P}_2$ son subespacios de $\mathbb{P}_2$

(a) $G = \{P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 / a_0 = 0\}$

Rpta: Subespacio de $\mathbb{P}_2$

(b) $H = \{P(x) = a_0 + a_1x / a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$

(c) $J = \{P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 / a_0 + a_1 + a_2 = 0\}$

Rpta: Subespacio de $\mathbb{P}_2$

4) Demostrar cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios del espacio de las funciones reales definidas en $\mathbb{R}$

(a) $L = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} / f(x) \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}\}$

Rpta: No es subespacio

(b) $M = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} / f(0) = 1\}$

(c) $N = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} / f(x) = h_1 + h_2 \cos x, h_1, h_2 \in \mathbb{R}\}$

Rpta: Si es subespacio

5) $\mathcal{C}[a,b] = \{$espacio de las funciones continuas en $[a,b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b\}$

(a) $Q = \{f \in \mathcal{C}[a,b] / \int_a^b f(x)dx = 0\}$

Rpta: Subespacio de $\mathcal{C}[a,b]$

(b) $R = \{f \in \mathcal{C}[a,b] / \int_a^b f(x)dx = 1\}$

Rpta: No es subespacio de $\mathcal{C}[a,b]$

6) $\mathbb{M}_2 = \{$espacio de las matrices cuadradas de orden 2 con elementos reales$\}$

$$S_1 = \{A \in \mathbb{M}_{22} / a_{22} = 0\}$$
$$S_2 = \left\{ A \in \mathbb{M}_{22} \middle/ A = \begin{pmatrix} b & a \\ a & -b \end{pmatrix} \right\}$$

(a) Demostrar que S_1 y S_2 son subespacios de $\mathbb{M}_{22}$

(b) $S = S_1 \cap S_2$ y demostrar que S es un subespacio de $\mathbb{M}_{22}$

6.4 Combinación lineal de vectores y espacio generado

En esta parte nos acercamos al concepto de **combinación lineal** de vectores, como una forma sencilla de reproducir todos los vectores del espacio vectorial, a partir de solo unos pocos. Con este concepto nos vamos acercando también a la noción de **base** que es fundamental en un espacio vectorial.

Si $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ entonces $\bar{a}$ se puede expresar en la forma

$$\bar{a} = a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1) = a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

en este caso se dice que $\bar{a}$ es combinación lineal de los tres vectores $\{i, j, k\}$, este concepto se puede generalizar para n vectores en la siguiente definición.

Definición 6.5

Sea $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ un conjunto de n vectores de un espacio vectorial V y sea $\bar{v} \in V$, se dice que $\bar{v}$ **es combinación lineal de los vectores** $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ si existen escalares $r_1, r_2, \ldots, r_n$ tales que

$$\bar{v} = r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots + r_n\bar{v}_n$$

Ejemplo 6.28

En $\mathbb{R}^3$, $\bar{c} = (16, -4, -3)$ es combinación lineal de los vectores $\bar{a} = (1, -1, 3)$ y $\bar{b} = (7, -3, 4)$ puesto que:

$$-5\bar{a} + 3\bar{b} = \bar{c}$$

Ejemplo 6.29

En $\mathbb{M}_{23}$

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 6 & 9 & -5 \end{pmatrix}$$

es combinación lineal de

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } M_2 = \begin{pmatrix} -7 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

puesto que $2M_1 + M_2 = M$

Ejemplo 6.30

En $\mathbb{P}_n$ todo polinomio se puede expresar como combinación lineal de los "monomios" $1, x, x^2, \ldots, x^n$.

En efecto

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 1$$

donde $a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \ldots, n$

Definición 6.6

Sea $\{\bar{v_1}, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ un conjunto de vectores de un espacio vectorial V. Se dice que $\{\bar{v_1}, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ **genera** V, si todo vector de V se puede expresar como combinación lineal de $\bar{v_1}, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$. Es decir, $\{\bar{v_1}, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ **genera** V, si existen escalares $r_1, r_2, \ldots, r_n$ tales que

$$\bar{v} = r_1 \bar{v}_1 + r_2 \bar{v}_2 + \cdots + r_n \bar{v}_n; \forall \bar{v} \in V$$

Ejemplo 6.31

$\{(1,0), (0,1)\}$ genera $\mathbb{R}^2$ puesto que

$$\bar{a} = (a_1, a_2) = a_1(1,0) + a_2(0,1), \forall \bar{a} \in \mathbb{R}^2$$

Ejemplo 6.32

$\{i, j, k\}$ genera $\mathbb{R}^3$ puesto que

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1 i + a_2 j + a_3 k \ \forall \bar{a} \in \mathbb{R}^3$$

Ejemplo 6.33

En $\mathbb{P}_n$, $n+1$ monomios $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ generan $\mathbb{P}_n$ puesto que

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 1$$

donde $a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \ldots, n$

Ejemplo 6.34

En $\mathbb{M}_{22}$, cuatro vectores $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ generan $\mathbb{M}_{22}$ donde

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

puesto que

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4, \ \forall M \in \mathbb{M}_{22}$$

Enseguida veremos otra forma de hallar subespacios de un espacio vectorial V

Definición 6.7

Sean $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k\}$ un conjunto de k vectores de un espacio vectorial V. El **espacio generado** por $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k\}$ denotado por $\text{Gen}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k\}$, es el conjunto de combinaciones lineales de $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k\}$.
Es decir

$$\text{Gen}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k\} = \{\bar{v}/\bar{v} = r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots + r_k\bar{v}_k \quad \text{donde } r_1, r_2, \dots, r_k \text{ son escalares}\}$$

Teorema 6.4

$\text{Gen}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k\}$ es un subespacio de V

Demostración. 1) Sean $\bar{u}, \bar{v}$ dos vectores cualesquiera de $\text{Gen}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k\}$

Si $\bar{u} \in \text{Gen}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k\}$ entonces existe escalares $r_1, r_2, \dots r_k$ tales que

$$\bar{u} = r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots + r_k\bar{v}_k$$

Si $\bar{v} \in \text{Gen}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k\}$ entonces existe escalares $t_1, t_2, \dots t_k$ tales que

$$\bar{v} = t_1\bar{v}_1 + t_2\bar{v}_2 + \cdots + t_k\bar{v}_k$$

entonces

$$\bar{u} + \bar{v} = (r_1 + t_1)\bar{v}_1 + (r_2 + t_2)\bar{v}_2 + \cdots + (r_k + t_k)\bar{v}_k$$

entonces $(\bar{u} + \bar{v}) \in \text{Gen}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k\}$

2) Sea $\bar{u}$ un vector cualesquiera de $\text{Gen}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k\}$ entonces existen escalares $r_1, r_2, \ldots, r_k$ tales que

$$\bar{u} = r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots r_k\bar{v}_k$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned} \alpha\bar{u} &= \alpha(r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots r_k\bar{v}_k) \\ &= (\alpha r_1)\bar{v}_1 + (\alpha r_2)\bar{v}_2 + \cdots + (\alpha r_k)\bar{v}_k \end{aligned}$$

luego $\alpha\bar{u} \in \text{Gen}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k\}$

◇

Ejemplo 6.35

Espacio generado por dos vectores en $\mathbb{R}^3$. Sean $\bar{a} = (1, 2, -3)$ y $\bar{b} = (3, -1, 5)$ vectores en $\mathbb{R}^3$. $S = \text{Gen}\{\bar{a}, \bar{b}\} = \{\bar{c}/\bar{c} = r\bar{a} + t\bar{b}\}$ donde $r, t \in \mathbb{R}$. ¿Qué representa geométricamente el subespacio S?

Si $\bar{c} = (x, y, z) \in S$ entonces

$$(x, y, z) = r(1, 2, -3) + t(3, -1, 5)$$

entonces

$$\left.\begin{aligned} x &= r + 3t \\ y &= 2r - t \\ z &= -3r + 5t \end{aligned}\right\} AX = B \text{ sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas}$$

Resolviendo este sistema

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 2 & -1 & y \\ -3 & 5 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 0 & 1 & \frac{2x-y}{7} \\ 0 & 0 & 2y - x + z \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

Este SEL tiene solución si y sólo si $2y - x + z = 0$ y representa el plano $\mathscr{P}$: $x - 2y - z = 0$

Entonces S es un plano que para por el origen y por tanto es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ (ver Ejemplo 6.20 Sección 6.2)

Nota

El espacio generado por dos vectores no paralelos de $\mathbb{R}^3$ es un plano que pasa por el origen.

El siguiente teorema nos proporciona un resultado muy interesante: la adición de uno (o más) vectores a un conjunto generador da por resultado otro conjunto generador.

Teorema 6.5

Sean $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n, \bar{v}_{n+1}\}$ $(n+1)$ vectores de un espacio vectorial V, si $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ genera V entonces $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n, \bar{v}_{n+1}\}$ también genera V.

Demostración. Si $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ genera V entonces

$$\text{Gen}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\} = \{\bar{v}/\bar{v} = r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots + r_n\bar{v}_n\} \forall \bar{v} \in V$$

$$\bar{v} = r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots + r_n\bar{v}_n + 0\bar{v}_{n+1}$$

entonces $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n, \bar{v}_{n+1}\}$ genera V (igualando a cero el coeficiente de $\bar{v}_{n+1}$) $\diamond$

6.5 Ejercicios propuestos

Determinar si el conjunto dado de vectores genera el espacio vectorial dado

1) En $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Rpta: Si genera $\mathbb{R}^2$

2) En $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

3) En $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

Rpta: No genera $\mathbb{R}^2$

4) En $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

5) En $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Rpta: No genera $\mathbb{R}^3$

6) En $\mathbb{P}_2$: $2 + x^2,\ 3 + x + 2x^2$

7) En $\mathbb{P}_2$: $2 + x^2,\ 3 + x + 2x^2,\ x$

Rpta: Si genera $\mathbb{P}_2$

8) En $\mathbb{M}_{22}$: $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

9) En $\mathbb{M}_{22}$: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

Rpta: Si genera $\mathbb{M}_{22}$

10) Cuáles de los siguientes vectores son combinación lineal de $\bar{u} = (3, -1, 3), \bar{v} = (2, 5, 1)$

(a) $(3, 16, 0)$

(b) $(1, -\frac{1}{3}, 1)$

(c) $(5, 2, -1)$

11) Cuáles de los siguientes polinomios son combinación lineal de $p_1(x) = 2 + x + 4x^2,\ p_2(x) = 1 - x + 3x^2,\ p_3(x) = 3 + 2x + 5x^2$

(a) $5+9x+5x^2$

(b) $12+6x^2$

(c) 0

(d) $2+2x+3x^2$

Rpta: (a),(b),(c),(d)

12) Determinar cuáles de los siguientes vectores pertenecen al espacio generado por $f(x)=\cos^2 x$ y $g(x)=\operatorname{sen}^2 x$

(a) $2-x^2$

(b) $\cos x$

(c) 1

(d) $\cos 2x$

13) Cuáles de los siguientes vectores pertenecen al espacio $\text{Gen}\{\bar{v}_1,\bar{v}_2,\bar{v}_3\}$ si $\bar{v}_1=(2,1,0,3), \bar{v}_2=(3,-1,5,2), \bar{v}_3=(-1,0,2,1)$

(a) $(1,1,1,1)$

(b) $(0,0,0,0)$

(c) $(2,3,-7,3)$

(d) $(-4,6,-13,4)$

Rpta: (b),(c) y (d)

6.6 Independencia lineal de vectores

El concepto de independencia lineal y dependencia lineal de vectores es un tema central del Álgebra Lineal.

Hemos visto que un espacio vectorial V tiene muchos conjuntos generadores. Los conjuntos de generadores son muy útiles en una variedad de problemas, ya que es posible estudiar un espacio vectorial V, trabajando primero con los vectores que

pertenecen a algún conjunto de generadores y después se aplican los resultados a la totalidad de V. Es por ello, que es conveniente mantener el conjunto de generadores tan pequeño como sea posible.

El problema de encontrar los conjuntos de generadores más pequeños para un espacio vectorial V, depende del concepto de independencia lineal.

Definición 6.8

Sea $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k\}$ un conjunto de vectores de un espacio vectorial V y la ecuación vectorial

$$r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots + r_k\bar{v}_k = \bar{0}$$

que tiene al menos una solución $r_1 = 0, r_2 = 0, \ldots, r_k = 0$ si esta solución es única entonces se dice que $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k\}$ es **linealmente independiente** (LI), si existen otras soluciones se dice que $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k\}$ es **linealmente dependiente** (LD).

Nota

1) Un conjunto de vectores $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k\}$ es L.I. en V si en la combinación lineal

$$r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots + r_k\bar{v}_k = \bar{0}$$

todos los coeficientes son cero, esto es: $r_1 = r_2 = \cdots = r_k = 0$

2) Un conjunto de vectores $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k\}$ es L.D. en V si existen escalares $r_1, r_2, \ldots, r_k$ no todos igual a cero tales que

$$r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots + r_k\bar{v}_k = \bar{0}$$

"no todos igual a cero" significa "por lo menos uno diferente de cero"

Ejemplo 6.36

$\{\bar{a}, \bar{b}\} \subset \mathbb{R}^2$ donde $\bar{a} = (1, -3), \bar{b} = (-4, 12)$ que relación existe entre $\bar{a}$ y $\bar{b}$, observamos que $\bar{a} = -\frac{1}{4}\bar{b}$ entonces $4\bar{a} + \bar{b} = \bar{0}$ entonces $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ es L.D.

Ejemplo 6.37

$\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\} \subset \mathbb{R}^3$ donde $\bar{a} = (3, 0, 1), \bar{b} = (0, -6, -5), \bar{c} = (1, -4, -3)$ qué relación existe entre $\bar{a}, \bar{b}$ y $\bar{c}$? la respuesta no es tan directa a simple vista como en el ejemplo anterior. Sin embargo, es fácil comprobar que $\bar{a} = 3\bar{c} - 2\bar{b}$, es decir

$$\bar{a} + 2\bar{b} - 3\bar{c} = \bar{0} \Longrightarrow \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\} \text{ es L.D.}$$

¿Cómo se sabe si un conjunto de vectores dados es LI o LD?

En el caso de dos vectores es fácil contestar esta pregunta

Teorema 6.6

Dos vectores $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ en V son L.D. si y sólo si $\bar{a} \parallel \bar{b}$

Demostración. ($\Rightarrow$) Si $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ es L.D. entonces $\bar{a} \parallel \bar{b}$
$\{\bar{a}, \bar{b}\}$ es L.D. entonces en la ecuación vectorial $r\bar{a} + t\bar{b} = \bar{0}$ no todos los coeficientes son cero. Supongamos que $r \neq 0$ entonces

$$\bar{a} = -\frac{t}{r}\bar{b} \text{ entonces } \bar{a} \parallel \bar{b}$$

($\Leftarrow$) Si $\bar{a} \parallel \bar{b}$ entonces $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ es L.D.
Si $\bar{a} \parallel \bar{b}$ entonces existe $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$\bar{a} = r\bar{b}$$
$$\bar{a} - r\bar{b} = \bar{0}$$

el coeficiente de $\bar{a}$ es $1 \neq 0$ entonces $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ es L.D. ◊

Nota

Como una consecuencia inmediata de este teorema se puede afirmar que

$$\{\bar{a}, \bar{b}\} \text{ es L.I.} \Longleftrightarrow \bar{a} \nparallel \bar{b}$$

Ejemplo 6.38

Sean $\bar{a} = (3, -1, 2)$ y $\bar{b} = (6, 0, -3)$ vectores de $\mathbb{R}^3$

$$\bar{a} \nparallel \bar{b} \Longrightarrow \{\bar{a}, \bar{b}\} \text{ es L.I.}$$

Ejemplo 6.39

Sean $\bar{b} = (4, -3, 2, 1), \bar{a} = (-8, 6, -4, -2)$ vectores en $\mathbb{R}^4$

$$\bar{a} = -2\bar{b} \Longrightarrow \bar{a} \parallel \bar{b} \Longrightarrow \{\bar{a}, \bar{b}\} \text{ es L.D.}$$

¿Cómo determinar si tres vectores en $\mathbb{R}^3$ son L.D. o L.I.?

Ejemplo 6.40

Sean $\bar{a} = (1, 2, -5), \bar{b} = (-1, 3, 0), \bar{c} = (1, 4, 2)$ vectores de $\mathbb{R}^3$ determinar si $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ es L.I.

Considerando la ecuación vectorial $r\bar{a} + t\bar{b} + k\bar{c} = \bar{0}$ reemplazando

$$r(1, 2, -5) + t(-1, 3, 0) + k(1, 4, 2) = (0, 0, 0)$$

operando

$$\left.\begin{aligned} r - t + k &= 0 \\ 2r + 3t + 4k &= 0 \\ -5r + 2k &= 0 \end{aligned}\right\} \quad AX = 0$$

es un sistema homogéneo de ecuaciones lineales que tiene solución trivial (solución única) si y solo si el determinante de la matriz de coeficientes es diferente de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 45 \neq 0 \Longrightarrow r = t = k = 0$$

entonces $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ es L.I.

Ejemplo 6.41

Sean $\bar{a} = (1,3,7), \bar{b} = (-3,1,2), \bar{c} = (4,2,5)$ vectores en $\mathbb{R}^3$ determinar si $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ es L.D.

Considerando la ecuación vectorial

$$r\bar{a} + t\bar{b} + k\bar{c} = \bar{0} \tag{6.3}$$

reemplazando

$$r(1,3,7) + t(-3,1,2) + k(4,2,5) = (0,0,0)$$

Operando

$$\left.\begin{aligned} r - 3t + 4k &= 0 \\ 3r + t + 2k &= 0 \\ 7r + 2t + 5k &= 0 \end{aligned}\right\} \quad AX = 0$$

es un sistema homogéneo de ecuaciones lineales que vamos a resolver

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_A$$

$r(A) = 2$ entonces existe $n - 2 = 1$ incógnita arbitraria, es decir, infinitas soluciones

$$k = m, \qquad t = k = m, \qquad r = 3t - 4k = 3m - 4m = -m$$

$S = \{-m, m, m\}$ $m \in \mathbb{R}$ entonces $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ es L.D.

El siguiente teorema nos proporciona una interpretación geométrica de la dependencia lineal en $\mathbb{R}^3$.

Teorema 6.7

$\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\} \subset \mathbb{R}^3$ es L.D. si y solo si $\bar{a}, \bar{b}$ y $\bar{c}$ son coplanares

Demostración. ($\Rightarrow$) Si $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ es LD entonces $\bar{a}, \bar{b}$ y $\bar{c}$ son coplanares
Si $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ es L.D. entonces en la ecuación vectorial

$$r\bar{a} + t\bar{b} + k\bar{c} = \bar{0}$$

no todos los coeficientes son cero.
Suponiendo que $r \neq 0$ entonces

$$\bar{a} = -\frac{t}{r}\bar{b} - \frac{k}{r}\bar{c} = m\bar{b} + n\bar{c}$$

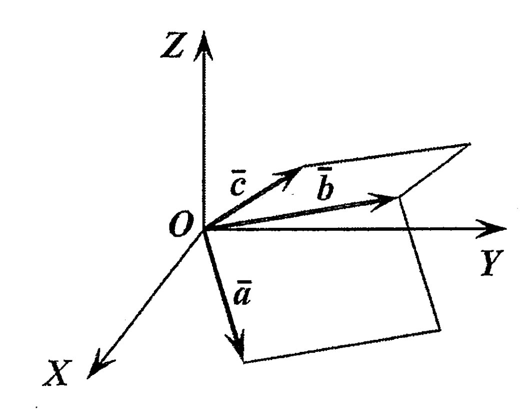
donde $m = -\frac{t}{r}$ y $n = -\frac{k}{r}$

$$\begin{aligned}\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) &= (m\bar{b} + n\bar{c}) \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) \\ &= m\bar{b} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) + n\bar{c} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) \\ &= 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

luego $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = 0$ entonces $\bar{a}, \bar{b}$ y $\bar{c}$ son coplanares. Es decir $\bar{a}$ pertenece al plano determinado por los vectores no paralelos $\bar{b}$ y $\bar{c}$ cuyo vector normal es $\bar{b} \times \bar{c}$
($\Leftarrow$) Si $\bar{a}, \bar{b}$ y $\bar{c}$ son coplanares entonces $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ es L.D.
Si $\bar{a}, \bar{b}$ y $\bar{c}$ son coplanares entonces $\bar{a} = r\bar{b} + t\bar{c}$, donde $\bar{b} \nparallel \bar{c}$ y determinan un plano. Luego $1\bar{a} - r\bar{b} - t\bar{c} = \bar{0}$ implica que $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ es L.D. puesto que el coeficiente de $\bar{a}$ es $1 \neq 0$ ◇

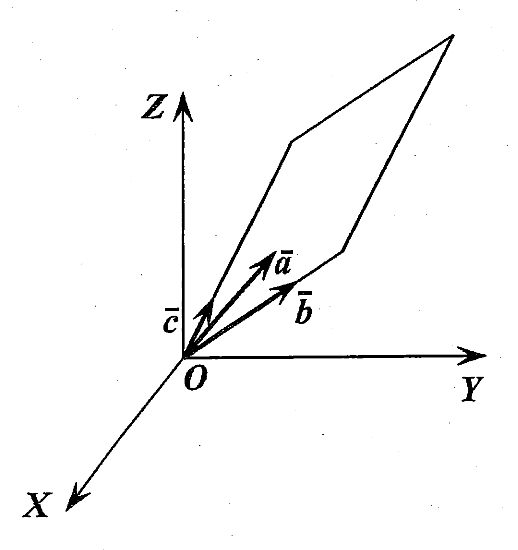
Ejemplo 6.42

$\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ es L.I. en $\mathbb{R}^3$ y por tanto geométricamente los vectores son no coplanares



Ejemplo 6.43

$\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ es L.D. en $\mathbb{R}^3$ y por tanto geométricamente los vectores son coplanares



Teorema 6.8

$\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\} \subset \mathbb{R}^m$ siempre es L.D si $m < n$

Demostración. Si $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ son n vectores en $\mathbb{R}^m$, hallaremos constantes $r_1, r_2, \ldots, r_n$ no todas igual a cero tales que

$$r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots + r_n\bar{v}_n = \bar{0} \tag{6.4}$$

Sean

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \bar{v}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Reemplazando en (6.4)

$$r_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + r_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\left.\begin{aligned} a_{11}r_1 + a_{12}r_2 + \cdots + a_{1n}r_n &= 0\\ a_{21}r_1 + a_{22}r_2 + \cdots + a_{2n}r_n &= 0\\ &\vdots\\ a_{m1}r_1 + a_{m2}r_2 + \cdots + a_{mn}r_n &= 0 \end{aligned}\right\} \quad AX = 0$$

sistema homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas $r_1, r_2, \ldots, r_n$.
Como $m < n$ entonces el sistema tiene infinitas soluciones. Por tanto existen escalares $r_1, r_2, \ldots, r_n$ no todos cero y $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ es L.D. ◇

Ejemplo 6.44

Tres vectores en $\mathbb{R}^2$ son L.D. Veamos: si

$$\bar{a} = (1,-2),\ \bar{b} = (3,5),\ \bar{c} = (2,3)$$
$$r\bar{a} + t\bar{b} + k\bar{c} = \bar{0}$$
$$r(1,-2) + t(3,5) + k(2,3) = \bar{0}$$

entonces

$$\left.\begin{aligned} r + 3t + 2k &= 0\\ -2r + 5t + 3k &= 0 \end{aligned}\right\} \quad A\bar{X} = \bar{0}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2\\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & \frac{7}{11} \end{pmatrix} = E_A$$

entonces $r(A) = 2 < n$ entonces existe $n - 2 = 1$ incógnita arbitraria $r = -\frac{1}{11}m, t = -\frac{7}{11}m, k = m$ entonces $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ es L.D.

Teorema 6.9

Si $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ es L.D. en un espacio vectorial V y $\bar{v}_1 \neq \bar{0}$ entonces existe un vector $\bar{v}_j$ con $j \geq 2$ tal que $\bar{v}_j$ es una combinación lineal de los vectores precedentes $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_{j-1}$

Demostración. Como $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ es L.D. entonces existen escalares $r_1, r_2, \ldots, r_n$ no todos igual a cero tales que

$$r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots + r_n\bar{v}_n = \bar{0}.$$

Sea r_j el coeficiente diferente de cero con mayor subíndice entonces $r_{j+1} = r_{j+2} = \cdots = r_n = 0$ y

$$r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots + r_j\bar{v}_j = \bar{0}$$

Además $j \geq 2$, puesto que para $j = 1$ tenemos

$$r_1\bar{v}_1 = \bar{0} \text{ y } \bar{v}_1 \neq \bar{0} \Longrightarrow r_1 = 0 \quad \text{(contradice la hipótesis)}$$

por lo tanto $v_j \neq 0$ para $j \geq 2$. Entonces

$$\bar{v}_j = -\frac{r_1}{r_j}\bar{v}_1 + \frac{-r_2}{r_j}\bar{v}_2 + \cdots + \frac{-r_{j-1}}{r_j}\bar{v}_{j-1}$$



Nota

La hipótesis de que el vector $\bar{v}_1 \neq \bar{0}$ es imprescindible para obtener la conclusión del teorema anterior como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 6.45

Sea $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\} \subset \mathbb{R}^3$ donde $\bar{v}_1 = (0,0,0), \bar{v}_2 = (3,2,-5)$ entonces $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ es L.D. y $\bar{v}_2$ no es combinación lineal del vector precedente, es decir no existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\bar{v}_2 = t\bar{v}_1$. Es decir

$$(3,2,-5) \neq t(0,0,0) \forall t \in \mathbb{R}$$

Nota

1) Todo conjunto de vectores L.I en V_n contiene a lo más n vectores.

2) Todo subconjunto de un conjunto de vectores L.I es L.I.

3) La incorporación de por lo menos un vector más al conjunto L.I. hará que este sea L.D.

4) Si $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k, \bar{v}_{k+1}\}$ es L.D en V_n y $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k\}$ es L.I entonces $\bar{v}_{k+1}$ es combinación lineal de los vectores $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$.

5) Todo conjunto de vectores $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_{k-1}, \bar{0}, \bar{v}_{k+1}\}$ de V_n que contiene al vector $\bar{0}$ es L.D.

El siguiente teorema unifica las nociones de independencia lineal y de conjunto generador en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 6.10

Todo conjunto de n vectores L.I. en $\mathbb{R}^n$ genera $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Supongamos que $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ es un conjunto de n vectores L.I. en $\mathbb{R}^n$ donde

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \bar{v}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

y sea

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Debemos demostrar que existen escalares $r_1, r_2, \ldots, r_n$ tales que $\bar{v} = r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots + r_n\bar{v}_n$

Es decir

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = r_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + r_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

operando

$$\left.\begin{aligned} a_{11}r_1 + a_{12}r_2 + \cdots + a_{1n}r_n &= x_1 \\ a_{21}r_1 + a_{22}r_2 + \cdots + a_{2n}r_n &= x_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}r_1 + a_{n2}r_2 + \cdots + a_{nn}r_n &= x_n \end{aligned}\right\} \quad AX = B$$

es un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, luego la matriz de coeficientes A es una matriz cuadrada de orden n, el conjunto de las columnas de A $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ es L.I. entonces $|A| \neq 0$ luego el sistema tiene solución única, y por tanto $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ genera $\mathbb{R}^n$. ◇

Nota

Este teorema no solo muestra que $\bar{v}$ se puede expresar como una combinación lineal de los vectores L.I. $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$, sino además que dicha combinación lineal es única (ya que el vector solución es único).

Ejemplo 6.46

Tres vectores L.I. en $\mathbb{R}^3$ generan $\mathbb{R}^3$

Sean $\bar{a} = (1,2,-5), \bar{b} = (0,1,4), \bar{c} = (2,2,-1)$

Si $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] \neq 0$ entonces $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ es L.I.

$$[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 17 \neq 0$$

entonces $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ es L.I. y por el teorema anterior $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ genera $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 6.47

Sea $\mathbb{M}_{32}$ = {Conjunto de las matrices de orden 3×2 con elementos reales} y sea $\{M_1, M_2, M_3\} \subset \mathbb{M}_{32}$ donde

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Averiguar si $\{M_1, M_2, M_3\}$ es L.I.

En la combinación lineal

$$r_1M_1 + r_2M_2 + r_3M_3 = 0$$

Si $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ entonces $\{M_1, M_2, M_3\}$ es L.I.

Veamos

$$r_1\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\\ -1 & 0\end{pmatrix}+r_2\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}+r_3\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}r_1-r_2+r_3 & 3r_1+3r_3\\ 2r_1+3r_2-2r_3 & 4r_1+r_2\\ -r_1+r_2 & -r_2+r_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\iff \left.\begin{aligned} r_1-r_2+r_3&=0\\ 3r_1+3r_3&=0\\ 2r_1+3r_2-2r_3&=0\\ 4r_1+r_2&=0\\ -r_1+r_2&=0\\ -r_2+r_3&=0\end{aligned}\right\}\quad AX=0$$

es un sistema homogéneo de 6 ecuaciones con $n=3$ incógnitas
$r(A)=3=n$ entonces el sistema tiene solución única
$r_3=0, r_2=0, r_1=r_2-r_3=0$ entonces $\{M_1, M_2, M_3\}$ es L.I.

Ejemplo 6.48

$\mathbb{P}_3 = \{$Conjunto de polinomios de grado ≤ 3 con coeficientes reales$\}$ Determinar si $\{1, x, x^2, x^3\}$ es L.I o L.D en $\mathbb{P}_3$
En la combinación lineal

$$r_1(1)+r_2(x)+r_3(x^2)+r_4(x^3)=0$$
$$r_1(1)+r_2(x)+r_3(x^2)+r_4(x^3)=0(1)+0(x)+0(x^2)+0(x^3)$$

si y sólo si

$$r_1=0,\ r_2=0,\ r_3=0,\ r_4=0$$

entonces $\{1, x, x^2, x^3\}$ es L.I.

Ejemplo 6.49

$\mathbb{P}_2$ = {Conjunto de polinomios de grado ≤ 2 con coeficientes reales } Determinar si $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ es L.I o L.D cuando

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 3 + x + 3x^2 \\ p_2(x) &= 3 - x + 5x^2 \\ p_3(x) &= -3 - 4x^2 \end{aligned}$$

En la combinación lineal

$$r_1 p_1(x) + r_2 p_2(x) + r_3 p_3(x) = 0$$
$$r_1(3 + x + 3x^2) + r_2(3 - x + 5x^2) + r_3(-3 - 4x^2) = 0$$
$$(3r_1 + 3r_2 - 3r_3) + (r_1 - r_2)x + (3r_1 + 5r_2 - 4r_3)x^2 = 0 + 0x + 0x^2$$

$$\left.\begin{aligned} 3r_1 + 3r_2 - 3r_3 &= 0 \\ r_1 - r_2 &= 0 \\ 3r_1 + 5r_2 - 4r_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad AX = 0 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_A$$

$r(A) = 2 < n$ entonces existe $n - 2 = 1$ incógnita arbitraria (infinitas soluciones)

$$r_3 = t,\ r_2 = \frac{1}{2}r_3 = \frac{1}{2}t,\ r_1 = -r_2 + r_3 = -\frac{1}{2}t + t = \frac{1}{2}t$$
$$S = \{\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}t, t\}\ t \in \mathbb{R}$$
$$\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\} \text{ es L.D.}$$

6.7 Ejercicios propuestos

1) $\mathbb{P}_3$ = {espacio de los polinomios de grado ≤ 3 con coeficientes reales}

(a) Determinar si $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ es L.I. cuando

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 1 + 2x^2 + x^3, \\ p_2(x) &= -2 + 3x - 4x^2 + x^3, \\ p_3(x) &= x + x^3 \end{aligned}$$

Rpta: L.I.

(b) Determinar si $\{q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x)\}$ es L.I. cuando

$$q_1(x) = 1 - 3x + 2x^2 + 4x^3,$$
$$q_2(x) = 2 - 6x + 4x^2 + 8x^3,$$
$$q_3(x) = 2 + 3x + x^3,$$
$$q_4(x) = 2 + 12x - 4x^2 - 6x^3$$

Rpta: L.D.

2) $\mathbb{P}_2 = \{$espacio de los polinomios de grado ≤ 2 con coeficientes reales$\}$

Sea $A = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\} \subset \mathbb{P}_2$ donde

$$p_1(x) = x^2 + 2x - 3,$$
$$p_2(x) = -2x^2 - 5x + 7,$$
$$p_3(x) = -x + 2$$

Averiguar si A es un conjunto L.I.

3) (a) $\mathbb{P}_3 = \{$espacio de los polinomios de grado ≤ 3 con coeficientes reales$\}$ donde

$$p_1(x) = x^3 + x - 1,$$
$$p_2(x) = x^2 - 2x + 1,$$
$$p_3(x) = x^3 - 1,$$
$$p_4(x) = x^3 + 2x^2 + 1.$$

Determinar si $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ es L.I

Rpta: L.D

(b) Para qué valores de x el conjunto $\{A, B, C, D\} \subset \mathbb{M}_{22}$ es L.D donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} x & 0 \\ x & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Si $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\} \subset \mathbb{R}^3$ es L.I. averiguar la dependencia lineal de $\{\bar{a} + 2\bar{b} + \bar{c}, 3\bar{a} - 2\bar{c}, -6\bar{b} + \bar{c}\}$

Rpta: L.D

4) Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son L.I o L.D. Justificar

(a) $\mathbb{P}_3$ = {espacio de los polinomios de grado ≤ 3 con coeficientes reales}, $\{p_1, p_2, p_3\} \subset \mathbb{P}_3$ donde

$$p_1(x) = x^3 + 3x,$$
$$p_2(x) = 3x,$$
$$p_3(x) = 2x^3 + 4$$

Rpta: L.D

(b) $\mathbb{M}_{23}$ = {espacio de las matrices de orden 2×3 con elementos reales}, $\{M_1, M_2, M_3\} \subset \mathbb{M}_{23}$ donde

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) $\{\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3\} \subset \mathbb{R}^4$ donde

$$\bar{X}_1 = (1, 0, 2, 1)^T$$
$$\bar{X}_2 = (-2, 3, -4, 1)^T$$
$$\bar{X}_3 = (0, 1, 0, 1)^T$$

Rpta: L.D

(d) $\mathbb{C}$ = {espacio de los números complejos}, $\{z_1, z_2\} \subset \mathbb{C}$ donde

$$z_1 = 2 + 3i$$
$$z_2 = 4 - i$$

5) Indicar el valor de verdad (V ó F) de las siguientes proposiciones. Justificar la respuesta

(a) $\mathbb{M}_{22}$ = {espacio de las matrices cuadradas de orden 2 con elementos real $\{M_1, M_2, M_3, M_4\} \subset \mathbb{M}_{22}$ es L.I. donde

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Rpta: V

(b) $\mathbb{P}_2 = \{$espacio de los polinomios de grado ≤ 2 con coeficientes reales$\}$
$\{p_1, p_2, p_3\} \subset \mathbb{P}_2$ es L.D donde

$$p_1(x) = 2x^2 + x$$
$$p_2(x) = x^2 + 3$$
$$p_3(x) = x$$

Rpta: F

6) Indicar el valor de verdad (V ó F) de las siguientes proposiciones

(a) Si $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ es L.I entonces $\{\bar{v}_1 + \bar{v}_2, \bar{v}_1 - \bar{v}_2\}$ es L.I

Rpta: V

(b) $\mathbb{P}_2 = \{$espacio de los polinomios de grado ≤ 2 con coeficientes reales$\}$
$\{p_1, p_2, p_3\} \subset \mathbb{P}_2$ es L.D. donde

$$p_1(x) = x^2 + 3x - 1$$
$$p_2(x) = x + 3$$
$$p_3(x) = 2x^2 - x + 1$$

(c) $\mathbb{M}_{22} = \{$espacio de las matrices cuadradas de orden 2 con elementos reales$\}$
$\{M_1, M_2, M_3\} \subset \mathbb{M}_{22}$ es L.I donde

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Rpta: F

6.8 Bases y dimensión

Seguimos con otro tema fundamental del Álgebra Lineal y es el que corresponde al concepto de base y dimensión.

En general, se piensa que una recta tiene una dimensión, que un plano tiene dos dimensiones y que el espacio que nos rodea tiene tres dimensiones, nuestro propósito está orientado a precisar esta idea intuitiva de dimensión.

Definición 6.9

Si V es un espacio vectorial y $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ es un conjunto finito de vectores en V. Entonces se dice que $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ es una **base** de V si:

1) $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ es L.I

2) $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ genera V

Ejemplo 6.50

$\{i, j, k\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. En efecto:

1) $\{i, j, k\}$ es L.I.

2) $\{i, j, k\}$ genera $\mathbb{R}^3$ puesto que

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1 i + a_2 j + a_3 k \ \forall \bar{a} \in \mathbb{R}^3$$

se denota por $B = \{i, j, k\}$ y se llama **base estándar** (o **base ordinaria**) de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 6.51

Si $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$. En efecto:

1) $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es L.I

2) $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ genera $\mathbb{R}^n$ puesto que:

$$\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n; \ \forall \bar{a} \in \mathbb{R}^n$$

$B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ se llama **base estándar** (o **base ordinaria**) de $\mathbb{R}^n$

Ejemplo 6.52

$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ es una base del espacio vectorial $\mathbb{P}_n$. En efecto:

1) $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ es L.I

2) $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ genera $\mathbb{P}_n$ puesto que

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 1 \; \forall p(x) \in \mathbb{P}_n$$

$B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ se llama base **estándar** (o **base ordinaria**) de $\mathbb{P}_n$

Ejemplo 6.53

$\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ es una base del espacio vectorial $\mathbb{M}_{22}$ donde

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En efecto:

1) $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ es L.I.

2) $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ genera $\mathbb{M}_{22}$ puesto que

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \; \forall M \in \mathbb{M}_{22}$$

$B = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ se llama **base estándar** (o **base ordinaria**) de $\mathbb{M}_{22}$

Ejemplo 6.54

$\{1, i\}$ es una base del espacio vectorial $\mathbb{C}$. En efecto:

1) $\{1, i\}$ es L.I

2) $\{1, i\}$ genera $\mathbb{C}$ puesto que

$$z = a + bi = a(1) + b(i) \; \forall z \in \mathbb{C}$$

$B = \{1, i\}$ se llama **base estándar** (o **base ordinaria**) de $\mathbb{C}$

Nota

Podemos advertir que un espacio vectorial V puede tener muchas bases. La pregunta que surge de inmediato es: ¿El número de vectores que contiene cada base es el mismo?
La respuesta nos proporciona el siguiente teorema

Teorema 6.11

Si $B_1 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m\}$ y $B_2 = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$ son bases de un espacio vectorial V entonces $m = n$. Es decir: "Dos bases cualesquiera de un espacio vectorial V contienen el mismo número de elementos"

Demostración. Si $B_1 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m\}$ y $B_2 = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$ son bases de un espacio vectorial V, debemos demostrar que $m = n$.

1) Si $m > n$ entonces B_1 es L.D. lo que contradice la hipótesis que B_1 es una base de V. Por tanto $m \leq n$

2) Si $n > m$ entonces B_2 es L.D. lo que contradice la hipótesis que B_2 es una base de V. Por tanto $n \leq m$

De 1) y 2) entonces $m = n$
Solo faltaría demostrar que si $m > n$ entonces B_1 es L.D.
Si $B_2 = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$ es una base de V entonces todos los $\bar{u}_i \in B_1$, se pueden expresar como combinación lineal de $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$. Es decir:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_1 &= a_{11}\bar{v}_1 + a_{12}\bar{v}_2 + \cdots + a_{1n}\bar{v}_n \\
\bar{u}_2 &= a_{21}\bar{v}_1 + a_{22}\bar{v}_2 + \cdots + a_{2n}\bar{v}_n \\
&\vdots \\
\bar{u}_m &= a_{m1}\bar{v}_1 + a_{m2}\bar{v}_2 + \cdots + a_{mn}\bar{v}_n
\end{aligned}$$

Para probar que B_1 es L.D debemos demostrar que existen escalares $r_1, r_2, \dots, r_m$ no todos igual a cero tales que

$$r_1\bar{u}_1 + r_2\bar{u}_2 + \cdots + r_m\bar{u}_m = \bar{0} \tag{6.5}$$

$$r_1(a_{11}\bar{v}_1 + a_{12}\bar{v}_2 + \cdots + a_{1n}\bar{v}_n) + r_2(a_{21}\bar{v}_1 + a_{22}\bar{v}_2 + \cdots + a_{2n}\bar{v}_n) + \cdots$$
$$+ r_m(a_{m1}\bar{v}_1 + a_{m2}\bar{v}_2 + \cdots + a_{mn}\bar{v}_n) = \bar{0}$$

$$(r_1a_{11} + r_2a_{21} + \cdots + r_ma_{m1})\bar{v}_1 + (r_1a_{12} + r_2a_{22} + \cdots + r_ma_{m2})\bar{v}_2 + \cdots$$
$$(r_1a_{1n} + r_2a_{2n} + \cdots + r_ma_{mn})\bar{v}_n = \bar{0}$$

$\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ es L.I. entonces:

$$\left.\begin{aligned} r_1a_{11} + r_2a_{21} + \cdots + r_ma_{m1} &= 0 \\ r_1a_{12} + r_2a_{22} + \cdots + r_ma_{m2} &= 0 \\ &\vdots \\ r_1a_{1n} + r_2a_{2n} + \cdots + r_ma_{mn} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

sistema homogéneo de n ecuaciones con m incógnitas $r_1, r_2, \ldots, r_m$ y como $m > n$ entonces este sistema tiene infinitas soluciones, por tanto existen escalares $r_1, r_2, \ldots, r_m$ no todos igual a cero y se concluye en (6.5) que B_1 es L.D.
De manera similar se puede demostrar que si $n > m$ entonces B_2 es L.D.
Por tanto queda probado que $m = n$. ◇

Definición 6.10

Sea el espacio vectorial V que tiene una base finita. El número de vectores que tiene cualquier base de V se llama **dimensión** de V y se denota por $\dim(V)$

Nota

1) Si $V = \{\bar{0}\}$ entonces $\dim(V) = 0$

2) Si V tiene una base finita entonces $\dim(V)$ es finita y V se llama **espacio vectorial de dimensión finita** en caso contrario V es de dimensión infinita.

Ejemplo 6.55

$\dim(\mathbb{R}^n) = n$; puesto que n vectores L.I. en $\mathbb{R}^n$ conforman una base de $\mathbb{R}^n$. En particular:

$\mathbb{R}^2$ (el plano), se le designa como bidimensional
$\mathbb{R}^3$ (el espacio), se le designa como tridimensional

Ejemplo 6.56

$\dim(\mathbb{P}_n) = n+1$, puesto que los $(n+1)$ monomios $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ constituyen una base de $\mathbb{P}_n$

Ejemplo 6.57

$\dim(\mathbb{M}_{mn}) = mn$, puesto que las matrices A_{ij} de orden $m \times n$ tienen 1 en la posición (ij) y 0 en las demás posiciones.
A_{ij} para $i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$ forman una base de $\mathbb{M}_{mn}$

Ejemplo 6.58

$\mathbb{P} =$ {espacio vectorial de los polinomios} tiene dimensión infinita, puesto que ningún conjunto finito de polinomios genera $\mathbb{P}$ entonces $\dim(\mathbb{P})$ es infinita.

Ejemplo 6.59

$\dim C[0, 1]$ es infinita.

Ejemplo 6.60

$\dim C'[0, 1]$ es infinita.

Teorema 6.12

Si $\dim(V) = n$ y si $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m\}$ es un conjunto de m vectores L.I. en V entonces $m \leq n$

Demostración. Sea $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ una base de V, si $m > n$ entonces como en la demostración del Teorema 6.11 se pueden hallar constantes $r_1, r_2, \ldots, r_m$ no todos igual a cero que satisfacen

$$r_1\bar{u}_1 + r_2\bar{u}_2 + \cdots + r_m\bar{u}_m = \bar{0},$$

lo que contradice la hipótesis. Luego $m \leq n$. ◇

Teorema 6.13

Si S es un subespacio de un espacio vectorial V de dimensión finita entonces S es de dimensión finita y $\dim(S) \leq \dim(V)$

Demostración. Sea $\dim(V) = n$. Si $S \subset V$ entonces todo conjunto L.I en S es también L.I en V y cualquier conjunto L.I en S, puede contener a lo más, n vectores (Teorema 6.12). Por tanto S tiene dimensión finita y $\dim(S) \leq n$. ◇

Ejemplo 6.61

Dimensión de los subespacios de $\mathbb{R}^3$

$S = \{\bar{0}\}$ entonces $\dim(S) = 0$

$S = \mathbb{R}^3$ entonces $\dim(S) = 3$

$S = \{(x, y, z)/x = at, y = bt, z = ct, a, b, c, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ entonces $\dim(S) = 1$

$S = \{(x, y, z)/ax + by + cz = 0, a, b, c \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ entonces $\dim(S) = 2$.

Nota

Como consecuencia de este teorema podemos afirmar que todo espacio vectorial V que contenga un subespacio S de dimensión infinita tiene dimensión infinita.

Ejemplo 6.62

$\mathbb{P}[0, 1] = \{$Espacio de las funciones polinómicas definidas en $[0, 1]\}$

$\mathbb{C}[0, 1]$ y $\mathbb{C}'[0, 1]$ tienen dimensión infinita.

$\mathbb{P}[0, 1] \subset \mathcal{C}[0, 1]$ entonces $\mathbb{P}[0, 1]$ tiene dimensión infinita.

$\mathbb{P}[0, 1] \subset \mathcal{C}'[0, 1]$ puesto que todo polinomio es derivable entonces $\mathbb{P}[0, 1]$ tiene dimensión infinita.

$\mathcal{C}'[0, 1] \subset \mathcal{C}[0, 1]$ entonces $\mathcal{C}'[0, 1]$ tiene dimensión infinita.

6.9 Ejercicios propuestos

1) Explicar, a simple vista, porqué los siguientes conjuntos de vectores no son bases de los espacios vectoriales que se indican

(a) $\bar{a} = (1, -2), \bar{b} = (3, -4), \bar{c} = (4, 1)$ para $\mathbb{R}^2$

Rpta: Una base de $\mathbb{R}^2$ tiene dos vectores

(b) $\bar{a} = (1, 0, -5), \bar{b} = (3, 1, -2)$ para $\mathbb{R}^3$

(c) $p_1(x) = 2 - x + 3x^2, p_2(x) = x + 4$ para $\mathbb{P}_2$

Rpta: Una base de $\mathbb{P}_2$ tiene tres vectores

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

2) ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son bases de $\mathbb{R}^2$?

a) $\{(-1, 2), (1, 1)\}$

b) $\{(2, 4), (0, 0)\}$

c) $\{(6, 3), (2, 1)\}$

d) $\{(7, -2), (1, 4)\}$

3) ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son bases de $\mathbb{R}^3$?

a) $\{(2, -1, 4), (1, 0, 2), (3, -1, 5)\}$

b) $\{(3, 1, 1), (4, 3, 0), (-1, -2, 1)\}$

c) $\{(1, -1, 2), (-3, 3, , -6), (0, 3, 4)\}$

d) $\{(1, -3, 1), (-2, 2, -3), (4, -8,$

Rpta: (a) y (d)

4) ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son bases de $\mathbb{P}_2$?

a) $\{x + 3, 2x + 5, x^2 + 1\}$

b) $\{x^2 + 3x - 1, 3x + 2, x^2 + 1\}$

c) $\{x^2 + 2x + 4, 3x^2 + 4x - 16, 3x^2 + 5x - 2\}$

d) $\{x^2 + 2, 3x^2 + 2x + 1, x^2 + 4\}$

5) ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son bases de $\mathbb{M}_{22}$?

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \right\}$

c) $\left\{\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\right\}$

d) $\left\{\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\\3 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 0\\-1 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\right\}$

Rpta: (b) y (c)

6) ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son bases de $\mathbb{C}$?

a) $\{3+2i, 1-5i\}$

b) $\{0+i, 0+0i\}$

c) $\{1+i, 1-i\}$

d) $\{i, 2i\}$

6.10 Espacio de las filas de una matriz. Coordenadas. Obtención de bases

Algunos espacios vectoriales están asociados con las matrices. En el estudio de este tema encontramos un procedimiento sencillo para construir bases reduciendo una matriz determinada a su forma escalonada.

Definición 6.11

Sea la matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Los vectores

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$
$$\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix}$$
$$\vdots$$
$$\bar{v}_m = \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

que se forman con las filas de A se llaman **vectores fila** de A.

Definición 6.12

El subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por los vectores fila de A se llama **espacio de las filas** de A

Ejemplo 6.63

Si

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Los vectores fila de A son

$$\bar{v}_1 = (3, 1, 2, -1)$$
$$\bar{v}_2 = (1, 0, 3, 3)$$

Teorema 6.14

Las operaciones elementales por fila en una matriz A no alteran el espacio de las filas de A

Nota

Si se requiere construir una base para el subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por un dete minado conjunto de vectores $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$, se forma la matriz A cuyos vector fila son $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$, entonces el problema se reduce a encontrar una base pa el espacio de las filas de A mediante el siguiente teorema.

Teorema 6.15

Los vectores fila diferentes de cero en la forma escalonada por filas de una matri A, constituye una base para el espacio de las filas de A

El siguiente ejemplo ilustra como se obtiene una base para el espacio de las fil de A

Ejemplo 6.64

Obtener una base para el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $\bar{v}_1 = (2,-5,3,-10), \bar{v}_2 = (1,-3,2,-5), \bar{v}_3 = (3,-8,5,-15)$

Se forma la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & -10 \\ 1 & -3 & 2 & -5 \\ 3 & -8 & 5 & -15 \end{pmatrix}$$

y encontramos la forma escalonada por filas de A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & -10 \\ 1 & -3 & 2 & -5 \\ 3 & -8 & 5 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_1 \times f_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -5 \\ 2 & -5 & 3 & -10 \\ 3 & -8 & 5 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{f_2-2f_1 \\ f_3-3f_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_3-f_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_A$$

Por el Teorema 6.14, dado que el espacio de las filas de A coincide con el espacio de las filas de E_A, entonces una base para el espacio de las filas de E_A también será una base para el espacio de las filas de A.

Por el Teorema 6.15, los vectores fila de E_A diferentes de cero son $\bar{u}_1 = (1,-3,2,-5), \bar{u}_2 = (0,1,-1,0)$

$\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ es L.I. y es una base para el espacio de las filas de E_A luego $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ es una base para el espacio de las filas de A.

Por tanto $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ es una base para el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$.

Nota

El procedimiento utilizado en $\mathbb{R}^n$ para construir una base a partir de un conjunt de vectores, se puede aplicar en cualquier espacio vectorial de dimensión finita.

Ejemplo 6.65

Encontrar una base para el subespacio de $\mathbb{P}_2$ generado por el conjunto de vectore $\{p_1, p_2, p_3\}$ donde

$$p_1(x) = -1 + 2x - 3x^2$$
$$p_2(x) = 8 - 5x + 4x^2$$
$$p_3(x) = 5 + x - 5x^2$$

Formamos la matriz A con los coeficientes de p_1, p_2 y p_3

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 8 & -5 & 4 \\ 5 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[f_2+8f_1, f_3+5f_1]{} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 11 & -20 \\ 0 & 11 & -20 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[(-1)f_1, f_3-f_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{20}{11} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_A$$

Los vectores fila diferentes de cero en E_A son

$$q_1 = (1, -2, 3)$$
$$q_2 = (0, 1, -\frac{20}{11}) \parallel (0, 11, -20)$$

$\{q_1, q_2\}$ es L.I. y es una base para el espacio de las filas de E_A luego $\{q_1, q_2\}$ e una base para el espacio de las filas de A, por tanto $B = \{q_1, q_2\}$ es una bas para el subespacio de $\mathbb{P}_2$ generado por $\{p_1, p_2, p_3\}$ donde $q_1(x) = 1 - 2x + 3x^2, q_2(x) = 11x - 20x^2$

Ejemplo 6.66

Encontrar una base para el subespacio de $\mathbb{M}_{22}$ generado por el conjunto de vectores $\{M_1, M_2, M_3\}$ donde

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Formamos la matriz A con los elementos de las matrices M_1, M_2 y M_3 en la siguiente forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \\ -3 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_2-2f_1, f_3+3f_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & 12 & 3 \\ 0 & 6 & -12 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_3+f_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & 12 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{6}f_2, \frac{1}{5}f_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_A$$

Los vectores fila diferentes de cero en E_A son

$$\begin{aligned} N_1 &= (1, 2, -3, 0) \\ N_2 &= (0, 1, -2, -1/2) \parallel (0, 2, -4, -1) \\ N_3 &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

$\{N_1, N_2, N_3\}$ es una base para el espacio de las filas de A, por tanto $B = \{N_1, N_2, N_3\}$ es una base par el subespacio de M_{22} generado por $\{M_1, M_2, M_3\}$ donde

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 6.67

Encontrar una base para el subespacio de $\mathbb{C}$ generado por el conjunto de vectore $\{z_1, z_2, z_3\}$ donde $z_1 = -7 + 3i, z_2 = 4 - 5i, z_3 = -2i$
Formamos la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 4 & -5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_1+2f_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 4 & -5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_2-4f_1, -\frac{1}{2}f_3]{} \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 23 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_A$$

Los vectores fila diferentes de cero en E_A son:

$$z_1' = (1, -7), \quad z_2' = (0, 1)$$

$\{z_1', z_2'\}$ es una base para el espacio de las filas de A por tanto $B = \{z_1', z_2'\}$ e una base para el subespacio de $\mathbb{C}$ generado por los vectores $\{z_1, z_2, z_3\}$ donde

$$z_1' = 1 - 7i \text{ y } z_2' = i$$

Teorema 6.16

Si $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ es una base para un espacio vectorial V entonces todo vectoı $\bar{v} \in V$ se puede expresar en la forma

$$\bar{v} = r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots + r_n\bar{v}_n$$

de manera única

Demostración. Supongamos que el vector $\bar{v}$ se puede expresar de dos manera diferentes. Es decir

$$\bar{v} = r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots + r_n\bar{v}_n \text{ y}$$
$$\bar{v} = k_1\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + \cdots + k_n\bar{v}_n$$

donde $k_i \neq r_i$ para algún $i = 1, 2, \ldots, n$

Restando miembro a miembro

$$\bar{0} = (r_1 - k_1)\bar{v}_1 + (r_2 - k_2)\bar{v}_2 + \cdots + (r_n - k_n)\bar{v}_n$$

$(r_i - k_i) \neq 0$ para algún $i = 1, 2, \ldots, n$ entonces $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ es LD lo que contradice la hipótesis que $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ es una base de V ◇

Por tanto, queda demostrado que si $\bar{v} \in V, \bar{v}$ se puede expresar de manera única como

$$\bar{v} = r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots + r_n\bar{v}_n$$

Definición 6.13

Si $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ es una base de un espacio vectorial V de dimensión finita y $\bar{v} = r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots + r_n\bar{v}_n$ entonces los escalares $r_1, r_2, \ldots, r_n$ se llaman las **coordenadas de $\bar{v}$ con respecto a la base B** y se denota por

$$(\bar{v})_B = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$$

Ejemplo 6.68

Si $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ donde $\bar{v}_1 = (1, 4, -3), \bar{v}_2 = (-2, -7, 8), \bar{v}_3 = (3, 12, -8)$

1) Si $\bar{v} = (1, 3, -6)$. Calcular $(\bar{v})_B$

2) Si $(\bar{v})_B = (3, 0, -1)$. Calcular $\bar{v}$

1) Si $\bar{v} = r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + r_3\bar{v}_3$ entonces $(\bar{v})_B = (r_1, r_2, r_3)$

$$(1, 3, -6) = r_1(1, 4, -3) + r_2(-2, -7, 8) + r_3(3, 12, -8)$$

igualando componentes resulta el SEL:

$$\left.\begin{aligned} r_1 - 2r_2 + 3r_3 &= 1 \\ 4r_1 - 7r_2 + 12r_3 &= 3 \\ -3r_1 + 8r_2 - 8r_3 &= -6 \end{aligned}\right\} \quad r_1 = 2, r_2 = -1, r_3 = -1 \Longrightarrow$$

$$(\bar{v})_B = (2, -1, -1)$$

(vector de coordenadas de $\bar{v}$ con respecto a la base B)

2) Si $(\bar{v})_B = (3,0,-1)$ entonces $(r_1, r_2, r_3) = (3,0,-1)$

Para recuperar el vector $\bar{v}$ de $\mathbb{R}^3$ usamos la ecuación $\bar{v} = r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + r_3\bar{v}_3$

$$\begin{aligned} \bar{v} &= 3\bar{v}_1 + 0\bar{v}_2 - \bar{v}_3 \\ &= 3(1,4,-3) - (3,12,-8) \\ &= (0,0,-1) \end{aligned}$$

Comprobando este resultado vamos a calcular

$$(\bar{v})_B = (0,0,-1)_B$$

Si $\bar{v} = k_1\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + k_3\bar{v}_3$ entonces $(\bar{v})_B = (k_1, k_2, k_3)$

$$(0,0,-1) = k_1(1,4,-3) + k_2(-2,-7,8) + k_3(3,12,-8)$$

igualando componentes se tiene el SEL

$$\left.\begin{aligned} k_1 - 2k_2 + 3k_3 &= 0 \\ 4k_1 - 7k_2 + 12k_3 &= 0 \\ -3k_1 + 8k_2 - 8k_3 &= -1 \end{aligned}\right\} \quad k_1 = 3, k_2 = 0, k_3 = -1 \Longrightarrow (\bar{v})_B = (3,0,-$$

es el vector de coordenadas de $\bar{v}$ con respecto a la base B que es un resultado esperado.

Ejemplo 6.69

Si $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ es una base de $\mathbb{P}_2$ donde $p_1(x) = 3 + x$, $p_2(x) = 1 + 2x - x^2$, $p_3(x) = 2 - 3x + x^2$

1) Calcular $(p(x))_B$, si $p(x) = 7 - x$

2) Calcular $q(x)$ si $(q(x))_B = 5 + 4x - 3x^2$

1) Si $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ es una base de $\mathbb{P}_2$ entonces $\forall p(x) \in \mathbb{P}_2$

$$\begin{aligned} p(x) &= r_1p_1(x) + r_2p_2(x) + r_3p_3(x) \\ 7 - x &= r_1(3 + x) + r_2(1 + 2x - x^2) + r_3(2 - 3x + x^2) \end{aligned}$$

operando

$$7 - x + 0x^2 = (3r_1 + r_2 + 2r_3) + (r_1 + 2r_2 - 3r_3)x + (-r_2 + r_3)x^2$$

igualando los términos se tiene el SEL

$$\left.\begin{aligned} 7 &= 3r_1 + r_2 + 2r_3 \\ -1 &= r_1 + 2r_2 - 3r_3 \\ 0 &= -r_2 + r_3 \end{aligned}\right\} \quad r_1 = \frac{2}{3}, r_2 = \frac{5}{3}, r_3 = \frac{5}{3}$$

$$(p(x))_B = (r_1, r_2, r_3) = (\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3})$$

Es decir

$$(p(x))_B = (7 - x)_B = \frac{2}{3} + \frac{5}{3}x + \frac{5}{3}x^2$$

(vector de coordenadas de $p(x)$ con respecto a la base B)

2) Si $(q(x))_B = 5 + 4x - 3x^2$ entonces $(r_1, r_2, r_3) = (5, 4, -3)$

Para recuperar el vector $q(x)$ de $\mathbb{P}_2$ usamos la ecuación

$$\begin{aligned} q(x) &= r_1 p_1(x) + r_2 p_2(x) + r_3 p_3(x) \\ &= 5(3 + x) + 4(1 + 2x - x^2) - 3(2 - 3x + x^2) \\ q(x) &= 13 + 22x - 7x^2 \end{aligned}$$

Comprobando este resultado vamos a calcular

$$(q(x))_B = (13 + 22x - 7x^2)_B$$

$\forall q(x) \in \mathbb{P}_2$ entonces

$$\begin{aligned} q(x) &= k_1 p_1(x) + k_2 p_2(x) + k_3 p_3(x) \\ 13 + 22x - 7x^2 &= k_1(3 + x) + k_2(1 + 2x - x^2) + k_3(2 - 3x + x^2) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} 13 &= 3k_1 + k_2 + 2k_3 \\ 22 &= k_1 + 2k_2 - 3k_3 \\ -7 &= -k_2 + k_3 \end{aligned}\right\} \quad k_1 = 5, k_2 = 4, k_3 = -3$$

$$(q(x))_B = (k_1, k_2, k_3) = (5, 4, -3)$$

Es decir:

$$(q(x))_B = (13 + 22x - 7x^2)_B = 5 + 4x - 3x^2$$

(vector de coordenadas de $q(x)$ con respecto a la base B) es el resultado espe rado

Ejemplo 6.70

Si $B = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ es una base de $\mathbb{M}_{22}$ donde

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1) Calcular $(M)_B$, si

$$M = \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

2) Calcular N, si

$$(N)_B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

1) Si $B = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ es una base de $\mathbb{M}_{22}$ entonces $\forall M \in \mathbb{M}_{22}$

$$M = r_1 M_1 + r_2 M_2 + r_3 M_3 + r_4 M_4$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = r_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} + r_3 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + r_4 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

operando e igualando

$$\left.\begin{aligned} -6 &= r_1 \\ 7 &= r_1 + r_2 + 2r_3 - r_4 \\ -1 &= -2r_1 + r_2 + r_4 \\ 3 &= 3r_1 - 5r_2 + r_3 - r_4 \end{aligned}\right\} \quad r_1 = -6, r_2 = -\frac{8}{5}, r_3 = \frac{8}{5}, r_4 = -\frac{57}{5}$$

$$(M)_B = (r_1, r_2, r_3, r_4) = (-6, -\frac{8}{5}, \frac{8}{5}, \frac{-57}{5})$$

Es decir

$$(M)_B = \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} -6 & -8/5 \\ 8/5 & -57/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -30 & -8 \\ 8 & -57 \end{pmatrix}$$

(vector de coordenadas de M con respecto la base B)

2) Si

$$(N)_B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

entonces $(r_1, r_2, r_3, r_4) = (4, 1, 0, -3)$

Para recuperar el vector N de $\mathbb{M}_{22}$ usamos la ecuación

$$N = r_1 M_1 + r_2 M_2 + r_3 M_3 + r_4 M_4$$

$$N = 4M_1 + M_2 + 0M_3 + (-3)M_4$$

$$N = 4\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -10 & 10 \end{pmatrix}$$

Comprobando este resultado, vamos a calcular

$$(N)_B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -10 & 10 \end{pmatrix}$$

$\forall N \in \mathbb{M}_{22}$ entonces

$$N = k_1 M_1 + k_2 M_2 + k_3 M_3 + k_4 M_4$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -10 & 10 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + k_4\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 4 &= k_1 \\ 8 &= k_1 + k_2 + 2k_3 - k_4 \\ -10 &= -2k_1 + k_2 + k_4 \\ 10 &= 3k_1 - 5k_2 + k_3 - k_4 \end{aligned}\right\} \quad k_1 = 4, k_2 = 1, k_3 = 0, k_4 = -3$$

$$(N)_B = (k_1, k_2, k_3, k_4) = (4, 1, 0, -3)$$

Es decir

$$(N)_B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -10 & 10 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(vector de coordenadas de N con respecto a la base B) es el resultado espera do.

Ejemplo 6.71

Si $B = \{z_1, z_2\}$ es una base de $\mathbb{C}$ donde $z_1 = 1 - 2i, z_2 = 3 + 4i$

1) Calcular $(z)_B$ si $z = 1 - 5i$

2) Calcular z' si $(z')_B = 2 + 7i$

1) Si $B = \{z_1, z_2\}$ es una base de $\mathbb{C}$ entonces $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} z &= r_1 z_1 + r_2 z_2 \\ 1 - 5i &= r_1(1 - 2i) + r_2(3 + 4i) \\ 1 - 5i &= (r_1 + 3r_2) + (-2r_1 + 4r_2)i \end{aligned}$$

Igualando:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= r_1 + 3r_2 \\ -5 &= -2r_1 + 4r_2 \end{aligned}\right\} \quad r_1 = \frac{19}{10}, r_2 = -\frac{3}{10}$$

$$(z)_B = (r_1, r_2) = (\frac{19}{10}, \frac{-3}{10})$$

Es decir:

$$(z)_B = (1 - 5i)_B = \frac{19}{10} - \frac{3}{10}i$$

(vector de coordenadas de z con respecto a la base B)

2) Si $(z')_B = 2 + 7i$ entonces $(r_1, r_2) = (2, 7)$

Para recuperar el vector z' de $\mathbb{C}$ usamos la ecuación

$$\begin{aligned} z' &= r_1 z_1 + r_2 z_2 \\ z' &= 2z_1 + 7z_2 = 2(1 - 2i) + 7(3 + 4i) = 23 + 24i \end{aligned}$$

Comprobando este resultado, vamos a calcular $(z')_B = (23 + 24i)_B$

$\forall z' \in \mathbb{C}$ entonces

$$\begin{aligned} z' &= k_1 z_1 + k_2 z_2 \\ 23 + 24i &= k_1(1 - 2i) + k_2(3 + 4i) \\ 23 + 24i &= (k_1 + 3k_2) + (-2k_1 + 4k_2)i \end{aligned}$$

Igualando:

$$\left.\begin{aligned} 23 &= k_1 + 3k_2 \\ 24 &= -2k_1 + 4k_2 \end{aligned}\right\} \quad k_1 = 2, k_2 = 7$$

$$(z')_B = (k_1, k_2) = (2, 7)$$

Es decir

$$(z')_B = (23 + 24i)_B = 2 + 7i$$

(vector de coordenadas de z con respecto a la base B) es el resultado esperado

6.11 Ejercicios propuestos

1) Enumerar los vectores fila de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -15 & 25 \end{pmatrix}$

2) Encontrar una base para el espacio de las filas de las matrices dadas en el Ejemplo 1

(a) **Rpta:** $\{(1, -1, 3), (0, 1, -2), (0, 0, 1)\}$

(c) **Rpta:** $\{(1, -4, -2, 0), (0, 11, 7, -3)\}$

3) Encontrar una base para el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los siguientes vectores:

(a) $(2,-1,3),(3,0,2),(-1,2,-4)$

Rpta: $\{(1,1,-1),(0,3,-5)\}$

(b) $(1,1,0),(0,0,1),(-2,0,2),(0,-3,0)$

(c) $(1,0,-3),(2,2,-6)$

Rpta: $\{(1,0,-3),(0,1,0)\}$

4) Encontrar una base para el subespacio de $\mathbb{P}_2$, generado por los siguientes vectores

(a) $3x^2+x-1, 2x^2+5, -x^2+x-11$

Rpta: $\{x^2+x-6, 2x-17\}$

(b) $7x^2+10x^2+4, 2x^2+6x+1, x^2+x$

(c) $4x^2-3x+2, x^2-7x+8, 5x^2-10x-10$

Rpta: $\{x^2-7x+8, 5x-6\}$

5) Encontrar una base para el subespacio de $\mathbb{M}_{22}$, generado por los siguientes vectores:

(a) $\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 0\\ 5 & 3\end{pmatrix}$

Rpta: $\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 4\\ -7 & -11\end{pmatrix}\right\}$

(b) $\begin{pmatrix}2 & -7\\ 4 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & -10\\ 6 & 5\end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix}7 & -4\\ -6 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & -1\\ -4 & 1\end{pmatrix}$

Rpta: $\left\{\begin{pmatrix}1 & -1\\ 6 & -4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -16 & 9\end{pmatrix}\right\}$

6) Encontrar una base para el subespacio de $\mathbb{C}$ generado por los siguientes vectores:

(a) $1-2i, 3+4i$

Rpta: $\{1-2i, i\}$

(b) $-2+3i, 5-7i, 3-4i$

(c) $4-7i, -8+14i, 12-21i$

Rpta: $\{4-7i\}$

7) Si $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, calcular $(\bar{v})_B$ y $\bar{u}$ donde:

(a) $\bar{v}_1 = (1,0,2), \bar{v}_2 = (3,-1,0), \bar{v}_3 = (0,1,-2), \bar{v} = (7,-3,1), (\bar{u})_B = (-1,0,1)$

Rpta: $(\bar{v})_B = (-1/8, 19/8, -5/8)$

$\bar{u} = (-1,1,-4)$

(b) $\bar{v}_1 = (2,1,3),\ \bar{v}_2 = (-1,4,5),\ \bar{v}_3 = (3,-2,-4),$
$\bar{v} = (-3,0,6),\ (\bar{u})_B = (4,3,2)$

(c) $\bar{v}_1 = (3,0,0), \bar{v}_2 = (1,2,-1), \bar{v}_3 = (0,1,5), \bar{v} = (1,1,1), (\bar{u})_B = (2,-1,3)$

Rpta: $(\bar{v})_B = (7/33, 4/11, 3/11)$

$\bar{u} = (5,1,16)$

8) Si $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ es una base de $\mathbb{P}_2$, calcular $(p)_B$ y q donde

(a) $p_1(x) = 1,\ p_2(x) = x-1,\ p_3(x) = x^2-1,\ p(x) = x^2+3x-1,\ (q(x))_B = x^2-x$

Rpta: $(p(x))_B = (3,3,1), q(x) = 2-x$

(b) $p_1(x) = 6,\ p_2(x) = 3+2x,\ p_3(x) = 3+4x+5x^2,\ p(x) = 5-7x^2,\ (q(x))_B = 5+4x+7x^2$

(c) $p_1(x) = x+1,\ p_2(x) = x-1,\ p_3(x) = x^2-1,\ p(x) = 6x^2+5x-4,\ (q(x))_B = x^2+x+1$

Rpta: $(p(x))_B = (-\frac{5}{2}, \frac{15}{2}, -6), q(x) = x^2+2x-1$

9) Si $B = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ es una base de $\mathbb{M}_{22}$, calcular $(M)_B$ y N donde

(a)

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad (N)_B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rpta: $(M)_B = \frac{1}{99}\begin{pmatrix} 117 & -42 \\ -24 & -16 \end{pmatrix}$

$N = \begin{pmatrix} 3 & -26 \\ -1 & 13 \end{pmatrix}$

(b)

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad (N)_B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \qquad (N)_B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Rpta: $(M)_B = \begin{pmatrix} -3 & -15 \\ -\frac{73}{2} & 154 \end{pmatrix}$

$N = \begin{pmatrix} 4 & 13 \\ 19 & 60 \end{pmatrix}$

10) Si $B = \{z_1, z_2\}$ es una base de $\mathbb{C}$, calcular $(z)_B$ y z' donde:

(a) $z_1 = 1 - 2i,\ z_2 = 3 + 4i,\ z = 7 - 4i,\ (z')_B = 4 + 16i$

Rpta: $(z)_B = 4 + i$

$z' = 52 + 56i$

(b) $z_1 = 1 + i,\ z_2 = 1 - i,\ z = 4 + 2i,\ (z')_B = 2 - 2i$

(c) $z_1 = -12 + 5i,\ z_2 = 6 - 3i,\ z = 14 + 8i,\ (z')_B = i$

Rpta: $(z)_B = -15 - \frac{83}{3}i$

$z' = 6 - 3i$

6.12 Espacios con producto interior

En el estudio de la Geometría Analítica Vectorial del Espacio (Capítulo 4) se definió el **producto escalar** de dos vectores de $\mathbb{R}^n$, estableciendo sus principales propiedades.

Tomando como una motivación las propiedades del producto escalar, enseguida analizaremos el concepto de producto interior en un espacio vectorial arbitrario.

Definición 6.14

Un **producto interior** (o **producto interno**) en un espacio vectorial V es una función que asigna a cada par de vectores $\bar{u}, \bar{v}$ de V un único número real $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$ que satisface las siguientes propiedades: $\forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$ y $r \in \mathbb{R}$

1) $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle$ (simetría)

2) $\langle \bar{u} + \bar{v}, \bar{w} \rangle = \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle + \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle$ (aditividad)

3) $\langle r\bar{u}, \bar{v} \rangle = r\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$ (homogeneidad)

4) $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \geq 0$ y $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = 0 \Longleftrightarrow \bar{v} = \bar{0}$ (positividad)

Definición 6.15

Un espacio vectorial que tiene definido un producto interior se llama **espacio vectorial con producto interior**

Ejemplo 6.72

$\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial con producto interior.

Definición 6.16

El producto escalar o producto punto, definido en $\mathbb{R}^n$ es un producto interior y se llama **producto interior euclidiano**

Como consecuencia inmediata de la definición se desprenden las siguientes propiedades

Teorema 6.17

1) $\langle 0, \bar{v} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{0} \rangle = 0 \; \forall \bar{v} \in V$

2) $\langle \bar{u}, \bar{v} + \bar{w} \rangle = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle + \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle \; \forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$

3) $\langle \bar{u}, r\bar{v} \rangle = r\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle \; \forall \bar{u}, \bar{v} \in V$ y $\forall r \in \mathbb{R}$

Demostración. 1) Se sabe que $\bar{0} = 0\bar{u}$

$$\langle \bar{0}, \bar{v} \rangle = \langle 0\bar{u}, \bar{v} \rangle = 0\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0 \quad \text{por homogeneidad}$$
$$\langle \bar{v}, 0 \rangle = \langle 0, \bar{v} \rangle = 0 \quad \text{por simetría}$$

2)

$$\begin{aligned} \langle \bar{u}, \bar{v} + \bar{w} \rangle &= \langle \bar{v} + \bar{w}, \bar{u} \rangle \quad \text{por simetría} \\ &= \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle + \langle \bar{w}, \bar{u} \rangle \quad \text{por aditividad} \\ &= \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle + \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle \quad \text{por simetría} \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} \langle \bar{u}, r\bar{v} \rangle &= \langle r\bar{v}, \bar{u} \rangle \quad \text{por simetría} \\ &= r\langle \bar{v}, \bar{u} \rangle \quad \text{por homogeneidad} \\ &= r\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle \quad \text{por simetría} \end{aligned}$$



Ejemplo 6.73

Si $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ son vectores en $\mathbb{R}^3$, $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = \bar{a} \cdot \bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ es un producto interior en $\mathbb{R}^3$ (se llama producto interior euclidiano)

Ejemplo 6.74

Si $\bar{a} = (a_1, a_2)$ y $\bar{b} = (b_1, b_2)$ son vectores en $\mathbb{R}^2$, $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = 5a_1b_1 + 3a_2b_2$ define un producto interior en $\mathbb{R}^2$. Veamos

1) $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = 5a_1b_1 + 3a_2b_2 = 5b_1a_1 + 3b_2a_2 = \langle \bar{b}, \bar{a} \rangle$

2) Si $\bar{c} = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ y $\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

$$\begin{aligned}\langle \bar{a} + \bar{b}, \bar{c} \rangle &= 5(a_1 + b_1)c_1 + 3(a_2 + b_2)c_2 \\ &= (5a_1c_1 + 3a_2c_2) + (5b_1c_1 + 3b_2c_2) \\ &= \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle + \langle \bar{b}, \bar{c} \rangle\end{aligned}$$

3) $r\bar{a} = (ra_1, ra_2) \forall r \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\langle r\bar{a}, \bar{b} \rangle &= 5(ra_1)b_1 + 3(ra_2)b_2 \\ &= r(5a_1b_1 + 3a_2b_2) \\ &= r\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle\end{aligned}$$

4) $\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle = 5a_1a_1 + 3a_2a_2 = 5a_1^2 + 3a_2^2 \geq 0 \forall \bar{a} \in \mathbb{R}^2$

además

$$\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle = 5a_1^2 + 3a_2^2 = 0 \Longleftrightarrow a_1 = a_2 = 0 \Longleftrightarrow \bar{a} = \bar{0}$$

Nota

El producto interior en este ejemplo es diferente al producto interior euclidiano en $\mathbb{R}^2$. Este resultado muestra que un espacio vectorial puede tener más de un producto interior definido en él.

Ejemplo 6.75

Sean $p = p(x)$ y $q = q(x)$ dos polinomios en $\mathbb{P}_n$ y sea la función $\langle p, q \rangle = \int_a^b p(x)q(x)dx$, donde a y b son números reales fijos con $a < b$. D.q. $\langle p, q \rangle$ es un producto interior en $\mathbb{P}_n$.

En efecto, observamos que los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ son funciones continuas,

el producto de dos funciones continuas es continuo y una función que es continu en un intervalo cerrado es integrable. Por lo tanto

1) $\langle p,q\rangle = \int_a^b p(x)q(x)dx = \int_a^b q(x)p(x)dx = \langle q,p\rangle$

2) $\langle p+q,h\rangle = \int_a^b (p(x)+q(x))h(x)dx = \int_a^b p(x)h(x)dx+\int_a^b q(x)h(x)dx =$ $\langle p,h\rangle + \langle q,h\rangle$

3) $\langle rp,q\rangle = \int_a^b (rp(x))q(x)dx = r\int_a^b p(x)q(x)dx = r\langle p,q\rangle, \forall r \in \mathbb{R}$

4) Si $p = p(x) \in \mathbb{P}_n \Longrightarrow p^2(x) \geq 0; \forall x \in [a,b]$, luego

$$\langle p,p\rangle = \int_a^b p^2(x)dx \geq 0$$

además

$$\int_a^b p^2(x)dx = 0 \Longleftrightarrow p(x) = 0$$

Nota

$\mathcal{C}[0,1]$ es un espacio vectorial y $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ es un producto interi en $\mathcal{C}[0,1]$.

Teorema 6.18

Sean $\bar{u}$ y $\bar{v}$ vectores de un espacio vectorial V de dimensión finita y sean $(\bar{u})_B$ y $(\bar{v})_B$ los vectores de coordenadas de $\bar{u}$ y $\bar{v}$ con respecto a una base fija B dond $(\bar{u})_B = (u_1,u_2,\dots,u_n)$ y $(\bar{v})_B = (v_1,v_2,\dots,v_n)$ entonces

$$\langle \bar{u},\bar{v}\rangle = (\bar{u})_B \cdot (\bar{v})_B = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

Demostración. Vamos a demostrar que $\langle \bar{u},\bar{v}\rangle$ es un producto interior de V. E principio $(\bar{u})_B$ y $(\bar{v})_B$ están determinados en forma única, por tanto $\langle \bar{u},\bar{v}\rangle$ es u número real determinado en forma única.

1)

$$\langle \bar{u},\bar{v}\rangle = (\bar{u})_B \cdot (\bar{v})_B$$

$$
\begin{aligned}
&= u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n \\
&= v_1u_1 + v_2u_2 + \cdots + v_nu_n \\
&= (\bar{v})_B \cdot (\bar{u})_B \\
&= \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle
\end{aligned}
$$

2)

$$
\begin{aligned}
\langle \bar{u} + \bar{v}, \bar{w} \rangle &= (\bar{u} + \bar{v})_B \cdot (\bar{w})_B \\
&= ((\bar{u})_B + (\bar{v})_B) \cdot (\bar{w})_B \\
&= ((\bar{u})_B \cdot (\bar{w})_B) + ((\bar{v})_B \cdot (\bar{w})_B) \\
&= \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle + \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle
\end{aligned}
$$

3)

$$
\begin{aligned}
\langle r\bar{u}, \bar{v} \rangle &= (r\bar{u})_B \cdot (\bar{v})_B \\
&= r(\bar{u})_B \cdot (\bar{v})_B \\
&= r\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle
\end{aligned}
$$

4)

$$
\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = (\bar{v})_B \cdot (\bar{v})_B = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 \geq 0; \forall \bar{v} \in V
$$

$$
\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = (\bar{v})_B \cdot (\bar{v})_B = 0 \Longleftrightarrow \bar{v} = \bar{0}
$$

◇

Definición 6.17

Sean $\bar{u}$ y $\bar{v}$ dos vectores en un espacio vectorial V y $(\bar{u})_B$ y $(\bar{v})_B$ los vectores de coordenadas de $\bar{u}$ y $\bar{v}$ con respecto a una base fija B.
$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = (\bar{u})_B \cdot (\bar{v})_B$ se llama **producto interior determinado por la base** B.

Ejemplo 6.76

Sean $B_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $B_2 = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ donde $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1), \bar{v}_1 = (1,0,0), \bar{v}_2 = (1,1,0), \bar{v}_3 = (1,1,1)$ Si $\bar{u} = (3,-5,2)$ y $\bar{v} = (-1,0,7)$ son vectores de $\mathbb{R}^3$. Encontrar el producto interior $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$ determinado por las bases B_1 y B_2 respectivamente.

$$(\bar{u})_{B_1} = (3,-5,2) \text{ y } (\bar{v})_{B_1} = (-1,0,7) \Longrightarrow \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = (\bar{u})_{B_1} \cdot (\bar{v})_{B_1} = 11$$
$$(\bar{u})_{B_2} = (8,-7,2) \text{ y } (\bar{v})_{B_2} = (-1,-7,7) \Longrightarrow \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = (\bar{u})_{B_2} \cdot (\bar{v})_{B_2} = 55$$

Nota

Observamos que las respuestas son diferentes lo que nos permite concluir que el producto interior definido depende de la base.

Ejemplo 6.77

Si $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es la base estándar u ordinaria de $\mathbb{R}^n$ y $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ vectores en $\mathbb{R}^n$. Calcular el producto interior $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$ determinado por la base B.
En efecto

$$(\bar{a})_B = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$
$$(\bar{b})_B = b_1e_1 + b_2e_2 + \cdots + b_ne_n = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$
$$\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = (\bar{a})_B \cdot (\bar{b})_B = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

es el producto interior determinado por la base B.

Nota

Un vector en la base estándar es el mismo vector.

Ejemplo 6.78

Si $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ es la base estándar u ordinaria en el espacio vectorial $\mathbb{P}_3$,

$$p_1(x) = 3 + x - x^2 + 7x^3$$
$$p_2(x) = 1 + 2x^2$$

son vectores en $\mathbb{P}_3$. Calcular el producto interior $\langle p_1, p_2 \rangle$ determinado por la base B.

En efecto:

$$
\begin{aligned}
(p_1(x))_B &= (3, 1, -1, 7) \\
(p_2(x))_B &= (1, 0, 2, 0) \\
\langle p_1, p_2 \rangle = (p_1(x))_B \cdot (p_2(x))_B &= (3, 1, -1, 7) \cdot (1, 0, 2, 0) = 1
\end{aligned}
$$

es el producto interior determinado por la base B.

Es decir, si nos fijamos directamente en los coeficientes de $(p_1(x))_B$ y $(p_2(x))_B$ tenemos:

$$\langle p_1, p_2 \rangle = 3(1) + 1(0) + (-1)(2) + 7(0) = 1$$

Ejemplo 6.79

Si $B = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ es la base estándar u ordinaria en el espacio vectorial $\mathbb{M}_{22}$ y

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

son dos matrices de $\mathbb{M}_{22}$.

Calcular el producto interior $\langle M, N \rangle$ determinado por la base B entonces

$$
\begin{aligned}
M &= 3M_1 - 4M_2 + 0M_3 + 1M_4 \quad && \Longrightarrow (M)_B = (3, -4, 0, 1) \\
N &= 2M_1 + 6M_2 - 3M_3 + 0M_4 \quad && \Longrightarrow (N)_B = (2, 6, -3, 0)
\end{aligned}
$$

$$\langle M, N \rangle = (M)_B \cdot (N)_B = (3, -4, 0, 1) \cdot (2, 6, -3, 0) = -18$$

es el producto interior determinado por la base B

Es decir, si nos fijamos directamente en los elementos de $(M)_N$ y $(N)_B$ se tiene que

$$\langle M, N \rangle = 3(2) + (-4)6 + 0(-3) + 1(0) = -18$$

Ejemplo 6.80

Si $B = \{1, i\}$ es la base estándar u ordinaria del espacio vectorial $\mathbb{C}$. Calcular el producto interior $\langle z_1, z_2 \rangle$ determinado por la base B donde $z_1 = i, z_2 = -1 - i$ son dos vectores de $\mathbb{C}$ entonces

$$z_1 = i = 0(1) + 1(i) \Longrightarrow (z_1)_B = (0, 1)$$
$$z_2 = -1 - i = (-1)1 + (-1)i \Longrightarrow (z_2)_B = (-1, -1)$$

$$\langle z_1, z_2 \rangle = (z_1)_B \cdot (z_2)_B = (0, 1) \cdot (-1, -1) = -1$$

es el producto interior determinado por la base B.
Es decir, si nos fijamos directamente en los coeficientes de la parte real e imaginaria de $(z_1)_B$ y $(z_2)_B$

$$\langle z_1, z_2 \rangle = (0)(-1) + (1)(-1) = -1$$

Nota

En todos los ejemplos anteriores se ha considerado la base estándar u ordinaria enseguida tomemos un ejemplo con base diferente de la estándar.

Ejemplo 6.81

Si $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ es una base del espacio vectorial $\mathbb{P}_2$ donde $p_1(x) = 1, p_2(x) = 1 + x, p_3(x) = 1 + x + x^2$.
Si $q_1(x) = 3 - 5x + 4x^2$ y $q_2(x) = -x + 6x^2$, calcular el producto interior $\langle q_1, q_2 \rangle$ determinado por la base B.
En efecto: $\langle q_1, q_2 \rangle = (q_1)_B \cdot (q_2)_B$

$$q_1(x) = r_1 p_1(x) + r_2 p_2(x) + r_3 p_3(x) \Longrightarrow (q_1)_B = (r_1, r_2, r_3)$$
$$3 - 5x + 4x^2 = r_1(1) + r_2(1 + x) + r_3(1 + x + x^2)$$

$$\left.\begin{aligned} 3 &= r_1 + r_2 + r_3 \\ -5 &= r_2 + r_3 \\ 4 &= r_3 \end{aligned}\right\} \quad AX = B \text{ es un sistema de ecuaciones lineales}$$

donde

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$r(A) = r(A|B) = 3 = n$ solución única

$$r_3 = 4, \; r_2 = -r_3 - 5 = -9, \; r_1 = -r_2 - r_3 + 3 = 8$$

luego $(q_1)_B = (8, -9, 4)$ como polinomio $(q_1(x))_B = 8 - 9x + 4x^2$.
Usando el mismo procedimiento para $q_2(x)$.

$$q_2(x) = k_1 p_1(x) + k_2 p_2(x) + k_3 p_3(x) \Longrightarrow (q_2)_B = (k_1, k_2, k_3)$$
$$-x + 6x^2 = k_1(1) + k_2(1 + x) + k_3(1 + x + x^2)$$

resolviendo el sistema de ecuaciones $k_1 = 1, k_2 = -7, k_3 = 6$.
luego $(q_2)_B = (1, -7, 6)$, como polinomio $(q_2(x))_B = 1 - 7x + 6x^2$

$$\langle q_1, q_2 \rangle = (q_1)_B \cdot (q_2)_B = (8, -9, 4) \cdot (1, -7, 6) = 8 + 63 + 24 = 95$$

es el producto interior determinado por la base B.

Nota

Si $B = \{1, x, x^2\}$ es la base estándar en $\mathbb{P}_2$ entonces

$$\langle q_1, q_2 \rangle = (q_1)_B \cdot (q_2)_B = (3, -5, 4) \cdot (0, -1, 6) = 29$$

Por tanto queda claro que el producto interior depende de la base elegida.

En el Capítulo 4 se estableció que: Si $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son vectores diferentes de cero en $\mathbb{R}^3$, entonces $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \cos\theta$, donde θ es el ángulo entre $\bar{a}$ y $\bar{b}$. Elevando ambos miembros al cuadrado

$$(\bar{a} \cdot \bar{b})^2 = |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 \cos^2\theta,$$

donde $|\bar{a}|^2 = \bar{a} \cdot \bar{a}$, $|\bar{b}|^2 = \bar{b} \cdot \bar{b}$ y $\cos^2\theta \leq 1$ luego

$$(\bar{a} \cdot \bar{b})^2 \leq |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2$$
$$(\bar{a} \cdot \bar{b})^2 \leq (\bar{a} \cdot \bar{a})(\bar{b} \cdot \bar{b})$$

(Desigualdad de Cauchy-Schwarz[1])

El siguiente teorema muestra que esta desigualdad se puede generalizar a cualquier espacio con producto interior.

Teorema 6.19

Si $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son vectores de un espacio vectorial V con producto interior, entonces

$$\langle \bar{u}, \bar{v}\rangle^2 \leq \langle \bar{u}, \bar{u}\rangle\langle \bar{v}, \bar{v}\rangle$$

Demostración. Para demostrar este teorema vamos a utilizar un artificio difícil de imaginar. En efecto:

1) Si $\bar{u} = \bar{0}$ entonces $\langle \bar{u}, \bar{v}\rangle = \langle \bar{0}, \bar{v}\rangle = 0$

   entonces si $\bar{u} = \bar{0}$ ó $\bar{v} = \bar{0}$ se cumple la igualdad

2) Si $\bar{u} \neq \bar{0}$ y $\bar{v} \neq \bar{0}$

   Sea $a = \langle \bar{u}, \bar{u}\rangle,\ b = 2\langle \bar{u}, \bar{v}\rangle,\ c = \langle \bar{v}, \bar{v}\rangle$ y $r \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\langle r\bar{u} + \bar{v}, r\bar{u} + \bar{v}\rangle &= \langle r\bar{u}, r\bar{u} + \bar{v}\rangle + \langle \bar{v}, r\bar{u} + \bar{v}\rangle \\
&= \langle r\bar{u}, r\bar{u}\rangle + \langle r\bar{u}, \bar{v}\rangle + \langle \bar{v}, r\bar{u}\rangle + \langle \bar{v}, \bar{v}\rangle \\
&= r^2\langle \bar{u}, \bar{u}\rangle + r\langle \bar{u}, \bar{v}\rangle + r\langle \bar{v}, \bar{u}\rangle + \langle \bar{v}, \bar{v}\rangle \\
&= r^2\langle \bar{u}, \bar{u}\rangle + 2r\langle \bar{u}, \bar{v}\rangle + \langle \bar{v}, \bar{v}\rangle \\
&= ar^2 + br + c
\end{aligned}$$

   Pero $\langle r\bar{u} + \bar{v}, r\bar{u} + \bar{v}\rangle \geq 0\ \forall (r\bar{u} + \bar{v}) \in V$

   luego $ar^2 + br + c \geq 0$ entonces

$$\begin{cases} ar^2 + br + c > 0 \Longrightarrow \text{no tiene raíces reales, es decir } b^2 - 4ac < 0 \\ ar^2 + br + c = 0 \Longrightarrow \text{tiene una raíz real múltiple, es decir } b^2 - 4ac = 0 \end{cases}$$

   Por tanto, $ar^2 + br + c \geq 0$ significa que $b^2 - 4ac \leq 0$ luego $b^2 \leq 4ac$ reemplazando los valores de a, b y c

$$4\langle \bar{u}, \bar{v}\rangle^2 \leq 4\langle \bar{u}, \bar{u}\rangle\langle \bar{v}, \bar{v}\rangle$$

[1] Augustin Louis Cauchy: matemático francés (1789–1857),
Hermann Amandus Schwarz: matemático alemán (1843–1921)

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle^2 \leq \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle$$

◇

Nota

Este resultado nos permitirá enseguida definir los conceptos de norma o longitud, distancia y ángulo en cualquier espacio con producto interior.

6.13 Ejercicios propuestos

1) Si $\bar{a} = (a_1, a_2)$ y $\bar{b} = (b_1, b_2)$ son elementos de $\mathbb{R}^2$.

   Demostrar que:

   (a) $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = a_1 b_1 + 2a_2 b_2$ es un producto interior en $\mathbb{R}^2$

   (b) $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = a_1 b_1 - a_2 b_2$ no es un producto interior en $\mathbb{R}^2$

   Rpta: no cumple (4)

2) Si $z_1 = x_1 + y_1 i$ y $z_2 = x_2 + y_2 i$ son elementos de $\mathbb{C}$ donde x_1, y_1, x_2, y_2 son números reales. D.q. $\langle z_1, z_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$ es un producto interior en $\mathbb{C}$

3) Si $p(x)$ y $q(x)$ son elementos de $\mathbb{P}_2$ donde a, b y c son tres números reales diferentes, d.q.

   (a) $\langle p, q \rangle = p(a)q(a) + p(b)q(b) + p(c)q(c)$ es un producto interior en $\mathbb{P}_2$.

   (b) $\langle p, q \rangle = p(a)q(a) + p(b)q(b)$ no es un producto interior en $\mathbb{P}_2$

   Rpta: no cumple (4). Si

$$p(x) = x^2 - 1 \text{ y } a = 1,\ b = -1 \Rightarrow \begin{cases} p(a) = p(b) = 0 \\ \langle p, p \rangle = 0 \text{ y } p \neq 0 \end{cases}$$

4) Si $f(x)$ y $g(x)$ son elementos de $C[0,1] = \{$espacio de las funciones continuas

de valor real definidas en $[0, 1]\}$. D.q.

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

es un producto interior en $\mathcal{C}[0, 1]$

5) Si $p(x)$ y $q(x)$ son elementos de $\mathbb{P}[0, 1] = \{$espacio de las funciones polinómicas definidas en $[0, 1]\}$. D.q.

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 xp(x)q(x)dx$$

es un producto interior en $\mathbb{P}[0, 1]$

6) Si $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ son elementos de $\mathbb{R}^3$

Determinar cuáles de las siguientes funciones definen un producto interior en $\mathbb{R}^3$

(a) $\langle \bar{a}, \bar{b}\rangle = a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2$

Rpta: no cumple (2)

(b) $\langle \bar{a}, \bar{b}\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + 2a_2b_3 - 2a_3b_2$

7) Si M y N son elementos de $\mathbb{M}_{32}$. D.q.

$$\langle M, N\rangle = \text{Traza}(N^T M)$$

es un producto interior de $\mathbb{M}_{32}$

8) Si

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix}$$

son elementos de $\mathbb{M}_{22}$ y $B = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ es la base estándar u ordinaria de $\mathbb{M}_{22}$ entonces $(C)_B = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ y $(D)_B = (d_1, d_2, d_3, d_4)$. Demostrar que

$$\langle C, D\rangle = (C)_B \cdot (D)_B = c_1d_1 + c_2d_2 + c_3d_3 + c_4d_4$$

es un producto interior determinado por la base B en $\mathbb{M}_{22}$.

9) Calcular $\langle M, N \rangle$ usando el producto interior del Ejercicio (8)

(a) $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \ N = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$

Rpta: $\langle M, N \rangle = -2$

(b) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \ N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

10) Calcular $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$ usando el producto interior del Ejercicio (1a)

(a) $\bar{a} = (7, -1), \ \bar{b} = (8, 2)$

Rpta: $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = 52$

(b) $\bar{a} = (0, 3), \ \bar{b} = (-4, 0)$

11) Calcular $\langle z_1, z_2 \rangle$ usando el producto interior del Ejercicio (2)

(a) $z_1 = 16 - 3i, \ z_2 = 7 + 8i$

Rpta: $\langle z_1, z_2 \rangle = 88$

(b) $z_1 = 2 + 4i, \ z_2 = 2 - 4i$

12) Si $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ y $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ son elementos de $\mathbb{P}_2$ y $B = \{1, x, x^2\}$ es la base estándar u ordinaria de $\mathbb{P}_2$ entonces $(p)_B = (a_0, a_1, a_2)$ y $(q)_B = (b_0, b_1, b_2)$ D.q.

$$\langle p, q \rangle = (p)_B \cdot (q)_B = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$$

es un producto interior determinado por la base B en $\mathbb{P}_2$

13) Calcular $\langle p, q \rangle$ usando el producto interior del Ejercicio 12

(a) $p(x) = 1 - 3x + 7x^2, \ q(x) = 7 + 5x$

Rpta: $\langle p, q \rangle = -8$

(b) $p(x) = 3 - 5x^2, \ q(x) = 9x + 15x^2$

14) Calcular el producto interior en $\mathbb{P}_3$ definido por:

$$\langle p, q \rangle = \int_{-2}^{3} p(x) q(x) dx$$

cuando

(a) $p(x) = 1 - 2x^2 + x^3,\ q(x) = (1-x)^3$

Rpta: $\langle p, q\rangle = \frac{-6925}{42}$

(b) $p(x) = 3 + 2x + x^2 + x^3,\ q(x) = 3 - 2x$

15) Calcular el producto interior en $C[0,1]$ definido por

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

(a) $f(x) = x^2,\ g(x) = e^x$

Rpta: $\langle f, g\rangle = e - 2$

(b) $f(x) = x^2,\ g(x) = \sqrt{1-x^3}$

6.14 Longitud y ángulo en espacios con producto interior

El producto interior es precisamente la estructura que nos permite definir los conceptos de longitud, distancia y ángulo entre los vectores.

Veremos enseguida que hay aplicaciones del producto interior que distarán mucho de nuestra noción geométrica común de vector. Precisamente utilizaremos la Desigualdad de Cauchy-Schwarz para desarrollar los conceptos de longitud, distancia y ángulo en espacios con producto interior cualesquiera.

Definición 6.18

Si V es un espacio vectorial con producto interior entonces la **norma** o **longitud** de un vector $\bar{u}$, denotada por $|\bar{u}|$ es el siguiente número real:

$$|\bar{u}| = \langle \bar{u}, \bar{u}\rangle^{1/2}$$

Definición 6.19

Si $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son elementos de un espacio vectorial V entonces la **distancia de $\bar{u}$ a $\bar{v}$** denotada por $d(\bar{u}, \bar{v})$ está dada por la siguiente igualdad

$$d(\bar{u}, \bar{v}) = |\bar{u} - \bar{v}|$$

Ejemplo 6.82

Si $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ son vectores en $\mathbb{R}^n$ entonces:

$$|\bar{a}| = \langle \bar{a}, \bar{a} \rangle^{1/2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

y

$$\begin{aligned} d(\bar{a}, \bar{b}) &= |\bar{a} - \bar{b}| = \langle \bar{a} - \bar{b}, \bar{a} - \bar{b} \rangle^{1/2} \\ &= \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2} \end{aligned}$$

Nota

Observamos que estas fórmulas coinciden con la definición de norma y distancia euclidianas que se estudiaron en el Capítulo 4.

Ejemplo 6.83

En el Ejemplo 6.74, Sección 6.12 se demostró que si $\bar{a} = (a_1, a_2)$ y $\bar{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ entonces $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = 5a_1b_1 + 3a_2b_2$ define un producto interior en $\mathbb{R}^2$.

Si $\bar{a} = (1, 0)$ y $\bar{b} = (0, 1)$ entonces:

$$|\bar{a}| = \langle \bar{a}, \bar{a} \rangle^{1/2} = \sqrt{5(1)(1) + 3(0)(0)} = \sqrt{5}$$

$$d(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a} - \bar{b}| = \langle \bar{a} - \bar{b}, \bar{a} - \bar{b} \rangle^{1/2}$$

Si $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b} = (1, -1)$

$$= \langle \bar{c}, \bar{c} \rangle^{1/2} = \sqrt{5(1)(1) + 3(-1)(-1)} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Nota

Como una consecuencia inmediata se tiene que la norma y la distancia dependen del producto interior que se emplee.

Por ejemplo, si en $\mathbb{R}^2$ consideramos el producto interior euclidiano, entonces $|\bar{a}| = 1$ y $d(\bar{a}, \bar{b}) = \sqrt{2}$.

Teorema 6.20

Si V es un espacio vectorial con producto interior, entonces la norma $|\bar{u}| = \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle^{1/2}$ y la distancia $d(\bar{u}, \bar{v}) = |\bar{u} - \bar{v}|$ satisfacen las siguientes propiedades:

$l1)$ $|\bar{u}| \geq 0$

$l2)$ $|\bar{u}| = 0 \Longleftrightarrow \bar{u} = \bar{0}$

$l3)$ $|r\bar{u}| = |r||\bar{u}|; \forall r \in \mathbb{R}$

$l4)$ $|\bar{u} + \bar{v}| \leq |\bar{u}| + |\bar{v}|$

d1) $d(\bar{u}, \bar{v}) \geq 0$

d2) $d(\bar{u}, \bar{v}) = 0 \Longleftrightarrow \bar{u} = \bar{v}$

d3) $d(\bar{u}, \bar{v}) = d(\bar{v}, \bar{u})$

d4) $d(\bar{u}, \bar{v}) \leq d(\bar{u}, \bar{w}) + d(\bar{w}, \bar{v})$

Demostración. La demostración de las primeras tres propiedades es directa, vamos a demostrar ($l4$), la desigualdad triangular
Se requiere la Desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle^2 \leq \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle$$

sacando las raíces cuadradas a ambos miembros:

$$|\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle| \leq |\bar{u}||\bar{v}|$$

luego se puede afirmar que

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle \leq |\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle| \leq |\bar{u}||\bar{v}|$$

entonces:

$$\begin{aligned}
|\bar{u} + \bar{v}|^2 &= \langle \bar{u} + \bar{v}, \bar{u} + \bar{v} \rangle \\
&= \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle + 2\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle + \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \\
&\leq \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle + 2|\bar{u}||\bar{v}| + \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \\
&= |\bar{u}|^2 + 2|\bar{u}||\bar{v}| + |\bar{v}|^2 \\
&= (|\bar{u}| + |\bar{v}|)^2
\end{aligned}$$

entonces

$$|\bar{u} + \bar{v}| \leq |\bar{u}| + |\bar{v}|$$

◇

Nota

Si $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son vectores no nulos de un espacio vectorial V con producto interior entonces

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle^2 \leq \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \quad \text{(Desigualdad de Cauchy-Schwarz)}$$

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle^2 \leq |\bar{u}|^2 |\bar{v}|^2$$

$$\left| \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{|\bar{u}||\bar{v}|} \right| \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{|\bar{u}||\bar{v}|} \leq 1$$

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1, \text{ para } \theta \in [0, \pi]$$

Definición 6.20

$\cos\theta = \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{|\bar{u}||\bar{v}|}$ donde θ es el ángulo entre los vectores no nulos $\bar{u}$ y $\bar{v}$.

Ejemplo 6.84

Encontrar el coseno del ángulo formado por los vectores $\bar{u} = (4, -5, 2, 0)$ y $\bar{v} = (-1, 3, 4, 6)$ de $\mathbb{R}^4$ con el producto interior euclidiano

$$\cos\theta = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|} = \frac{-11}{\sqrt{45}\sqrt{62}}$$

Ejemplo 6.85

Si M_{22} tiene el producto interior determinado por la base estándar, calcular el ángulo entre las matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \text{ y } M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\cos\theta = \frac{\langle M_1, M_2 \rangle}{|M_1||M_2|} = \frac{(M_1)_B \cdot (M_2)_B}{|(M_1)_B||(M_2)_B|} = \frac{(2, 0, 3, -4) \cdot (0, 1, 0, 0)}{\sqrt{29}} = 0$$

$$\cos\theta = 0 \text{ y } \theta = \frac{\pi}{2}$$

Este ejemplo sugiere la siguiente definición:

Definición 6.21

En un espacio vectorial con producto interior, dos vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son **ortogonales** si $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0$

Nota

Es posible que dos vectores sean ortogonales con respecto a un producto interior y no lo sean con respecto a otro producto interior.

Teorema 6.21: Generalización del Teorema de Pitágoras[2]

Si $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son vectores ortogonales en un espacio con producto interior, entonces

$$|\bar{u} + \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2$$

Demostración.

$$\begin{aligned} |\bar{u} + \bar{v}|^2 = \langle \bar{u} + \bar{v}, \bar{u} + \bar{v} \rangle &= |\bar{u}|^2 + 2\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle + |\bar{v}|^2 \\ &= |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 \end{aligned}$$

puesto que $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0$ ◇

Nota

En $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ con el producto interior euclidiano, este teorema se reduce al Teorema de Pitágoras.

6.15 Ejercicios propuestos

1) Sea $\mathbb{R}^2$ con el producto interior $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = a_1 b_1 + 2a_2 b_2$ donde $\bar{a} = (a_1, a_2)$ y $\bar{b} = (b_1, b_2)$. Determinar $|\bar{c}|$ cuando

   (a) $\bar{c} = (3, -1)$

[2]Pitágoras, filósofo y matemático griego (569–475 a C)

Rpta: $\sqrt{11}$

(b) $\bar{c} = (-4, 7)$

(c) $\bar{c} = (1, 0)$

Rpta: 1

(d) $\bar{c} = (2, 7)$

2) Repetir el Ejercicio 1) con producto interior euclidiano en $\mathbb{R}^2$

(a) **Rpta:** $\sqrt{10}$

(c) **Rpta:** 1

3) Sea $\mathbb{C}$ con el producto interior $\langle z_1, z_2 \rangle = x_1x_2 + y_1y_2$ donde $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i,\ x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Determinar $|z|$ cuando

(a) $z = 2 + i$

Rpta: $\sqrt{5}$

(b) $z = i$

(c) $z = -3 + 4i$

Rpta: 5

(d) $z = -3 - 4i$

4) Sea $\mathbb{P}_2$ con producto interior $\langle p, q \rangle = (p)_B \cdot (q)_B$ donde B es la base estándar u ordinaria de $\mathbb{P}_2$ (Ejercicio 12, Sección 6.13). Calcular $|p|$ cuando:

(a) $p(x) = 7 - 5x + x^2$

Rpta: $5\sqrt{3}$

(b) $p(x) = 1 - x^2$

(c) $p(x) = 1 + 4x - 3x^2$

Rpta: $\sqrt{26}$

(d) $p(x) = (2 + x)^2$

5) Sea $\mathbb{M}_{22}$ con producto interior $\langle M, N \rangle = (M)_B \cdot (N)_B$ donde B es la base estándar u ordinaria de $\mathbb{M}_{22}$ (Ejercicio 8, Sección 6.13). Calcular $|A|$ cuando:

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$

Rpta: $\sqrt{59}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

Rpta: $\sqrt{54}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

6) En $\mathbb{R}^2$ con el producto interior definido en el Ejercicio 1) determinar la $d(\bar{a}, \bar{b})$ cuando:

(a) $\bar{a} = (3, -2)$, $\bar{b} = (8, 6)$

Rpta: $\sqrt{153}$

(b) $\bar{a} = (4, 7)$, $\bar{b} = (3, 0)$

7) Repetir el ejercicio 6) con producto interior euclidiano de $\mathbb{R}^2$

(a) **Rpta:** $\sqrt{89}$

(b)

8) En $\mathbb{C}$ con producto interior definido en el ejercicio 3) determinar la $d(z_1, z_2)$ cuando

(a) $z_1 = 5 - 2i$, $z_2 = 4 + i$

Rpta: $\sqrt{10}$

(b) $z = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$

9) En $\mathbb{P}_2$ con producto interior definido en el ejercicio 4) determinar la $d(p, q)$ cuando

(a) $p(x) = 3 - x + x^2$, $q(x) = -1 + x^2$

Rpta: $\sqrt{17}$

(b) $p(x) = 1 + x,\ q(x) = 1 - x$

10) En M_{22} con producto interior definido en el ejercicio 5) determinar la $d(M, N)$ cuando:

(a) $M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}$

Rpta: $2\sqrt{17}$

(b) $M = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$

11) En $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ con producto interior euclidiano. Calcular el coseno del ángulo entre $\bar{a}$ y $\bar{b}$ cuando:

(a) $\bar{a} = (5, -3),\ \bar{b} = (7, 2)$

Rpta: $\frac{29}{\sqrt{34}\sqrt{53}}$

(b) $\bar{a} = (2, -1, 0),\ \bar{b} = (4, 3, 3)$

(c) $\bar{a} = (1, -1, 0, 1),\ \bar{b} = (2, 3, 0, -4)$

Rpta: $\frac{-5}{\sqrt{3}\sqrt{29}}$

12) En $\mathbb{P}_2$ con producto interior definido en el ejercicio 4) Calcular el coseno del ángulo entre p y q cuando

(a) $p(x) = -1 + 3x + 6x^2,\ q(x) = x + 3x^2$

Rpta: $\frac{21}{\sqrt{46}\sqrt{10}}$

(b) $p(x) = 5 - x^2,\ q(x) = 1 + 7x - 4x^2$

13) En $\mathbb{M}_{22}$ con producto interior definido en el ejercicio 5) Calcular el coseno del ángulo entre M y N cuando

(a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Rpta: $\frac{7}{3\sqrt{13}}$

(b) $M = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$

14) En $\mathbb{C}$ con producto interior definido en el ejercicio 3) Calcular el coseno del ángulo entre z_1 y z_2 cuando

(a) $z_1 = 2 + i,\ z_2 = 4 - 5i$

Rpta: $\frac{3}{\sqrt{5}\sqrt{41}}$

(b) $z_1 = -1 + 3i,\ z_2 = i$

15) En $\mathbb{P}_2$ con producto interior definido en el ejercicio 4) Demostrar que $p(x) = 1 - 5x + 4x^2$ y $q(x) = 4 + 8x + 9x^2$ son ortogonales.

16) En $\mathbb{M}_{22}$ con producto interior definido en el ejercicio 5) Cuáles de las siguientes matrices son ortogonales a

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$$

a) $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

6.16 Bases ortonormales. Proceso de Gram-Schmidt [3]

Muchas veces, la selección de una base en un espacio vectorial queda a criterio de la persona que resuelve el problema. La mejor estrategia consiste en seleccionar una base que simplifique la solución. En los espacios con producto interior la mejor selección será una base en la cual todos los vectores sean ortogonales entre sí.

[3] Jörgen Pedersen Gram, matemático danés (1850–1916),
Erhard Schmidt, matemático alemán (1876–1959)

Definición 6.22

Un conjunto de vectores en un espacio vectorial con producto interior se llama **ortonormal** si cualesquiera dos vectores distintos en el conjunto es ortogonal y si cada uno tiene longitud 1.

Ejemplo 6.86

$\{i, j, k\}$ en $\mathbb{R}^3$ con producto interior euclidiano es ortonormal puesto que:

1) $i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$

2) $|i| = |j| = |k| = 1$

Ejemplo 6.87

$\{\bar{a}, \bar{b}\}$ en $\mathbb{R}^2$ con producto interior euclidiano donde $\bar{a} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ y $\bar{b} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ es ortonormal puesto que

1) $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$

2) $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 1$

El siguiente teorema muestra que el cálculo de vectores de coordenadas es muy sencillo cuando la base es ortonormal, es por ello nuestro interés de encontrar bases ortonormales para espacios con producto interior.

Teorema 6.22

Si $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ es una base ortonormal para un espacio vectorial V con producto interior y $\bar{u} \in V$ entonces

$$\bar{u} = \langle \bar{u}, \bar{v}_1 \rangle \bar{v}_1 + \langle \bar{u}, \bar{v}_2 \rangle \bar{v}_2 + \cdots + \langle \bar{u}, \bar{v}_n \rangle \bar{v}_n$$

Es decir, el vector de coordenadas de $\bar{u}$ respecto a B es:

$$(\bar{u})_B = (\langle \bar{u}, \bar{v}_1 \rangle, \langle \bar{u}, \bar{v}_2 \rangle, \ldots, \langle \bar{u}, \bar{v}_n \rangle)$$

Demostración. Si $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ es una base de V, un vector $\bar{u} \in V$, se puede expresar de manera única como:

$$\bar{u} = r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots + r_n\bar{v}_n$$

$\forall \bar{v}_i \in B, i = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned}\langle \bar{u}, \bar{v}_i \rangle &= \langle r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots + r_n\bar{v}_n, \bar{v}_i \rangle \\ &= r_1\langle \bar{v}_1, \bar{v}_i \rangle + r_2\langle \bar{v}_2, \bar{v}_i \rangle + \cdots + r_n\langle \bar{v}_n, \bar{v}_i \rangle\end{aligned}$$

como $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ es una base ortonormal se deduce que

$$\begin{aligned}\langle \bar{v}_i, \bar{v}_i \rangle &= |\bar{v}_i|^2 = 1 \\ \langle \bar{v}_i, \bar{v}_j \rangle &= 0 \text{ si } j \neq i\end{aligned}$$

Luego $\langle \bar{u}, \bar{v}_i \rangle = r_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ ◇

Ejemplo 6.88

Sea $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ con producto interior euclidiano donde $\bar{v}_1 = (0, 1, 0), \bar{v}_2 = (\frac{5}{13}, 0, \frac{12}{13}), \bar{v}_3 = (-\frac{12}{13}, 0, \frac{5}{13})$. Encontrar el vector de coordenadas de $\bar{u} = (-3, 1, 2)$ con respecto a la base B

$$\begin{aligned} r_1 &= \langle \bar{u}, \bar{v}_1 \rangle = (-3, 1, 2) \cdot (0, 1, 0) = 1 \\ r_2 &= \langle \bar{u}, \bar{v}_2 \rangle = (-3, 1, 2) \cdot (\frac{5}{13}, 0, \frac{12}{13}) = \frac{9}{13} \\ r_3 &= \langle \bar{u}, \bar{v}_3 \rangle = (-3, 1, 2) \cdot (-\frac{12}{13}, 0, \frac{5}{13}) = \frac{46}{13} \\ (\bar{u})_B &= (1, \frac{9}{13}, \frac{46}{13}) \end{aligned}$$

Nota

Este teorema es tan útil puesto que cuando se trabaja con bases ortonormales, se evita resolver el S.E.L. para encontrar el vector de coordenadas respecto a una base.

Teorema 6.23

Si $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ es un conjunto ortogonal de vectores diferentes de cero en un espacio vectorial con producto interior, entonces B es L.I.

Demostración. Supongamos que

$$r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots + r_n\bar{v}_n = \bar{0} \tag{6.6}$$

para d.q. $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ es L.I. es necesario demostrar que

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 0$$

En efecto: En (6.6)

$$\langle r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots + r_n\bar{v}_n, \bar{v}_i\rangle = \langle\bar{0}, \bar{v}_i\rangle = 0$$

$$r_1\langle\bar{v}_1, \bar{v}_i\rangle + r_2\langle\bar{v}_2, \bar{v}_i\rangle + \cdots + r_n\langle\bar{v}_n, \bar{v}_i\rangle = 0 \tag{6.7}$$

B es un conjunto ortogonal entonces $\langle\bar{v}_j, \bar{v}_i\rangle = 0$ si $j \neq i$ por lo que la Ecuación (6.7) se reduce a

$$r_i\langle\bar{v}_i, \bar{v}_i\rangle = 0 \tag{6.8}$$

dado que los vectores $\bar{v}_i \neq \bar{0}; \forall i = 1, 2, \ldots, n$ y $\langle\bar{v}_i, \bar{v}_i\rangle \neq 0$ por la propiedad de la positividad para los productos interiores. Por consiguiente en (6.8) $r_i = 0\ \forall i = 1, 2, \ldots, n$. Es decir B es L.I. ◇

Ejemplo 6.89

Sea $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ un conjunto ortogonal de vectores de $\mathbb{R}^3$ donde $\bar{v}_1 = (0, 1, 0)$, $\bar{v}_2 = (-3, 0, 2)$, $\bar{v}_3 = (2, 0, 3)$ si consideramos el producto interior euclidiano en $\mathbb{R}^3$ entonces B es L.I. Veamos:

Suponiendo $r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + r_3\bar{v}_3 = \bar{0}$, por el teorema anterior

$$r_1\langle\bar{v}_1, \bar{v}_1\rangle = r_1(1) = 0 \Longrightarrow r_1 = 0$$

$$r_2\langle\bar{v}_2, \bar{v}_2\rangle = r_2(9 + 4) = r_2(13) = 0 \Longrightarrow r_2 = 0$$

$$r_3\langle\bar{v}_3, \bar{v}_3\rangle = r_3(4 + 9) = r_3(13) = 0 \Longrightarrow r_3 = 0$$

$\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ es L.I.

Por lo tanto B es L.I. entonces B es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.
Luego $B = \{(0,1,0), (-\frac{3}{\sqrt{13}}, 0, \frac{2}{\sqrt{13}}), (\frac{2}{\sqrt{13}}, 0, \frac{3}{\sqrt{13}})\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Nota

Enseguida vamos a resolver el problema de obtener bases ortonormales para espacios vectoriales con producto interior.

Ahora estamos en condiciones de convertir una base B de un espacio vectorial V de dimensión finita y con producto interior en una base ortonormal. Es decir, convertir B en una base de vectores mutuamente ortogonales y cada uno de los cuales es un vector unitario.

Nota

Es importante observar que el espacio vectorial S para el cual se conoce una base puede ser un subespacio de un espacio vectorial mayor V.
Lo que queremos hacer es obtener un conjunto ortonormal de vectores que genere el mismo espacio S.

Ejemplo 6.90

Sea $B = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ una base de un subespacio S de $\mathbb{R}^2$ con producto interior euclidiano. Encontrar una base ortonormal para S.
El objetivo es cambiar los vectores $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ por vectores $\bar{y}_1, \bar{y}_2$ ortogonales y normalizados.
La solución es un caso especial del proceso de Gram-Schmidt. Con el fin de motivar el procedimiento, vamos a pensar geométricamente aunque la solución es algebraica

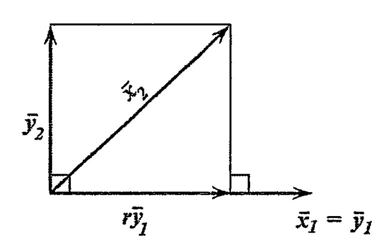
1) Sea $\bar{y}_1 = \bar{x}_1$
   ($\bar{y}_1 \neq \bar{0}$ porque es un elemento de una base)

2)

$$r\bar{y}_1 = \text{proy}_{\bar{y}_1} \bar{x}_2 = \frac{\bar{x}_2 \cdot \bar{y}_1}{|\bar{y}_1|^2} \bar{y}_1$$

$$\bar{x}_2 = r\bar{y}_1 + \bar{y}_2$$

$$\bar{y}_2 = \bar{x}_2 - r\bar{y}_1 = \bar{x}_2 - \frac{\bar{x}_2 \cdot \bar{y}_1}{|\bar{y}_1|^2}\bar{y}_1$$



Debemos demostrar que $\bar{y}_2 \neq \bar{0}$

$\bar{y}_2 = \bar{x}_2 - r\bar{x}_1$ entonces $\bar{y}_2 \neq \bar{0}$ puesto que $\bar{y}_2$ es combinación lineal de vectores L.I.

Suponiendo que $\bar{y}_2 = \bar{0}$ entonces $\bar{0} = \bar{x}_2 - r\bar{x}_1$, $\bar{x}_2 = r\bar{x}_1$ luego $\bar{x}_2 \parallel \bar{x}_1$ entonces $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ es L.D. lo que contradice la hipótesis, por tanto $\bar{y}_2 \neq \bar{0}$

Debemos demostrar que $\bar{y}_2$ es ortogonal a $\bar{y}_1$

$$\bar{y}_2 \cdot \bar{y}_1 = (\bar{x}_2 - \frac{\bar{x}_2 \cdot \bar{y}_1}{|\bar{y}_1|^2}\bar{y}_1) \cdot \bar{y}_1 = \bar{x}_2 \cdot \bar{y}_1 - \frac{\bar{x}_2 \cdot \bar{y}_1}{|\bar{y}_1|^2}|\bar{y}_1|^2 = 0$$

Por tanto $\bar{y}_2$ es ortogonal a $\bar{y}_1$

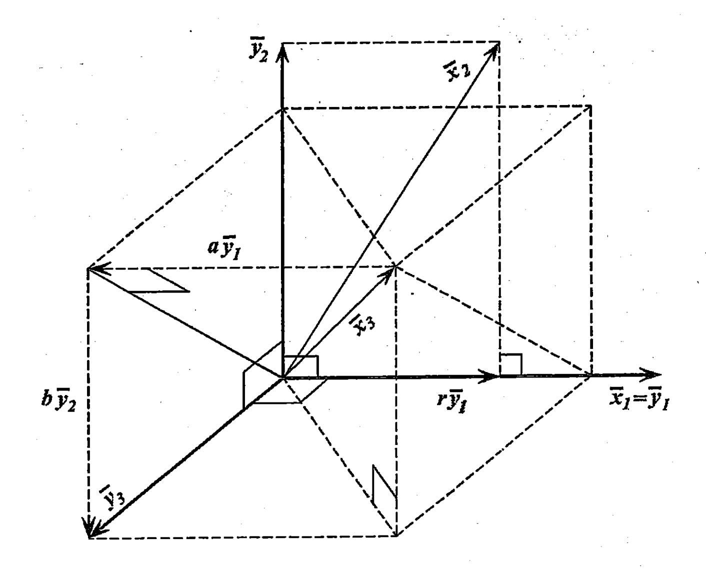
3) Normalizando estos vectores, obtenemos una base ortonormal, $\{\frac{\bar{y}_1}{|\bar{y}_1|}, \frac{\bar{y}_2}{|\bar{y}_2|}\}$ es una base ortonormal de S.

Ejemplo 6.91

Sea $B = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$ una base de un subespacio S de $\mathbb{R}^3$ con producto interior euclidiano. Encontrar una base ortonormal para S.

Como en el ejemplo anterior vamos a realizar una interpretación geométrica para llegar a la solución algebraica:

El lector debe acudir al gráfico a medida que se estudia la solución. El objetivo es cambiar los vectores $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2, \bar{x}_3$ por vectores $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3$ mutuamente ortogonales y normalizados



1) Sea $\bar{y}_1 = \bar{x}_1$

   ($\bar{y}_1 \neq \bar{0}$ porque es un elemento de una base)

2)

$$r\bar{y}_1 = \text{proy}_{\bar{y}_1} \bar{x}_2 = \frac{\bar{x}_2 \cdot \bar{y}_1}{|\bar{y}_1|^2}\bar{y}_1$$

$$\bar{x}_2 = r\bar{y}_1 + \bar{y}_2$$

$$\bar{y}_2 = \bar{x}_2 - \frac{\bar{x}_2 \cdot \bar{y}_1}{|\bar{y}_1|^2}\bar{y}_1$$

Debemos demostrar que $\bar{y}_2 \neq \bar{0}$.

$\bar{y}_2 = \bar{x}_2 - r\bar{x}_1$ entonces $\bar{y}_2 \neq \bar{0}$ puesto que $\bar{y}_2$ es combinación lineal de los vectores $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ L.I.

Suponiendo que $\bar{y}_2 = \bar{0}$ entonces $\bar{0} = \bar{x}_2 - r\bar{x}_1$, $\bar{x}_2 = r\bar{x}_1$ luego $\bar{x}_2 \parallel \bar{x}_1$ entonces $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ es L.D. lo que contradice la hipótesis. Por tanto $\bar{y}_2 \neq \bar{0}$

Debemos demostrar que $\bar{y}_2$ es ortogonal a $\bar{y}_1$

$$\bar{y}_2 \cdot \bar{y}_1 = (\bar{x}_2 - \frac{\bar{x}_2 \cdot \bar{y}_1}{|\bar{y}_1|^2}) \cdot \bar{y}_1 = \bar{x}_2 \cdot \bar{y}_1 - \frac{\bar{x}_2 \cdot \bar{y}_1}{|\bar{y}_1|^2}|\bar{y}_1|^2 = 0$$

Por tanto $\bar{y}_2$ es ortogonal a $\bar{y}_1$

3) Queremos encontrar un vector $\bar{y}_3$ que sea ortogonal a cada uno de los vectores $\bar{y}_1$ e $\bar{y}_2$.

En la figura

$$\bar{y}_3 = c\bar{x}_3 + a\bar{y}_1 + b\bar{y}_2 \tag{6.9}$$

debemos encontrar a, b y c de modo que $\bar{y}_3$ cumpla con las condiciones requeridas

$\bar{y}_3 \cdot \bar{y}_1 = 0$ entonces

$$(c\bar{x}_3 + a\bar{y}_1 + b\bar{y}_2) \cdot \bar{y}_1 = 0$$
$$c(\bar{x}_3 \cdot \bar{y}_1) + a(\bar{y}_1 \cdot \bar{y}_1) + b(\bar{y}_2 \cdot \bar{y}_1) = 0$$
$$c(\bar{x}_3 \cdot \bar{y}_1) + a|\bar{y}_1|^2 = 0$$

puesto que $\bar{y}_2 \cdot \bar{y}_1 = 0$.

Si hacemos $c = 1$ entonces

$$a = -\frac{\bar{x}_3 \cdot \bar{y}_1}{|\bar{y}_1|^2}$$

$\bar{y}_3 \cdot \bar{y}_2 = 0$ entonces

$$(c\bar{x}_3 + a\bar{y}_1 + b\bar{y}_2) \cdot \bar{y}_2 = 0$$
$$c(\bar{x}_3 \cdot \bar{y}_2) + a(\bar{y}_1 \cdot \bar{y}_2) + b(\bar{y}_2 \cdot \bar{y}_2) = 0$$
$$c(\bar{x}_3 \cdot \bar{y}_2) + b|\bar{y}_2|^2 = 0$$

puesto que $\bar{y}_1 \cdot \bar{y}_2 = 0$

Si hacemos $c = 1$ entonces

$$b = -\frac{\bar{x}_3 \cdot \bar{y}_2}{|\bar{y}_2|^2}$$

En (6.9)

$$\bar{y}_3 = \bar{x}_3 - \left(\frac{\bar{x}_3 \cdot \bar{y}_1}{|\bar{y}_1|^2}\right)\bar{y}_1 - \left(\frac{\bar{x}_3 \cdot \bar{y}_2}{|\bar{y}_2|^2}\right)\bar{y}_2$$

Debemos demostrar que $\bar{y}_3 \neq \bar{0}$

Suponiendo que $\bar{y}_3 = \bar{0}$ entonces

$$\bar{x}_3 - r_1\bar{x}_1 - r_2\bar{y}_2 = \bar{0}$$
$$\bar{x}_3 = r_1\bar{y}_1 + r_2\bar{y}_2$$

entonces $\{\bar{x}_3, \bar{y}_1, \bar{y}_2\}$ es L.D contradice el hecho de que $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$ es L.I. Por tanto $\bar{y}_3 \neq \bar{0}$

Luego $\{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3\}$ es un conjunto de vectores no nulos y mutuamente ortogonales.

4) Normalizando estos vectores obtenemos una base ortonormal $\{\frac{\bar{y}_1}{|\bar{y}_1|}, \frac{\bar{y}_2}{|\bar{y}_2|}, \frac{\bar{y}_3}{|\bar{y}_3|}\}$ para S

Nota

Todo espacio vectorial de dimensión finita con producto interior tiene una base ortonormal. Esta afirmación queda establecida en el siguiente teorema

Teorema 6.24

Si $S \neq 0$ es un subespacio de un espacio vectorial V de dimensión finita y con producto interior y $B = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$ es una base para S entonces el siguiente conjunto de vectores $\{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n\}$ es una base ortogonal para S si

$$\bar{y}_1 = \bar{x}_1$$
$$\bar{y}_2 = \bar{x}_2 - \frac{\langle \bar{x}_2, \bar{y}_1 \rangle}{\langle \bar{y}_1, \bar{y}_1 \rangle}\bar{y}_1$$
$$\bar{y}_3 = \bar{x}_3 - \frac{\langle \bar{x}_3, \bar{y}_1 \rangle}{\langle \bar{y}_1, \bar{y}_1 \rangle}\bar{y}_1 - \frac{\langle \bar{x}_3, \bar{y}_2 \rangle}{\langle \bar{y}_2, \bar{y}_2 \rangle}\bar{y}_2$$
$$\vdots$$
$$\bar{y}_n = \bar{x}_n - \frac{\langle \bar{x}_n, \bar{y}_1 \rangle}{\langle \bar{y}_1, \bar{y}_1 \rangle}\bar{y}_1 - \frac{\langle \bar{x}_n, \bar{y}_2 \rangle}{\langle \bar{y}_2, \bar{y}_2 \rangle}\bar{y}_2 - \cdots - \frac{\langle \bar{x}_n, \bar{y}_{n-1} \rangle}{\langle \bar{y}_{n-1}, \bar{y}_{n-1} \rangle}\bar{y}_{n-1}$$

Demostración. Demostraremos usando inducción matemática

1) $n = 1$ entonces $\bar{y}_1 = \bar{x}_1$ (0bvio)

$\bar{y}_1 \neq \bar{0}$ ya que $\bar{x}_1 \neq \bar{0}$ ($\bar{x}_1$ pertenece a un conjunto de vectores L.I.)

2) $\bar{y}_2 \neq \bar{0}$ puesto que $\bar{y}_2$ es combinación lineal de $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ L.I.

Si $\bar{y}_2 = \bar{0}$ entonces $\bar{x}_2 - \alpha\bar{x}_1 = \bar{0}$ luego $\bar{x}_2 = \alpha\bar{x}_1$ contradice el hecho de que $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ es L.I.

$\langle \bar{y}_2, \bar{y}_1 \rangle = 0$ puesto que

$$\begin{aligned} \langle \bar{y}_2, \bar{y}_1 \rangle &= \langle \bar{x}_2 - \frac{\langle \bar{x}_2, \bar{y}_1 \rangle}{\langle \bar{y}_1, \bar{y}_1 \rangle}\bar{y}_1, \bar{y}_1 \rangle \\ &= \langle \bar{x}_2, \bar{y}_1 \rangle - \frac{\langle \bar{x}_2, \bar{y}_1 \rangle}{\langle \bar{y}_1, \bar{y}_1 \rangle}\langle \bar{y}_1, \bar{y}_1 \rangle = 0 \end{aligned}$$

3) Suponiendo que $\{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_{k-1}\}$ son vectores no nulos mutuamente ortogonales. Entonces:

(a) $\bar{y}_k \neq \bar{0}$ puesto que $\bar{y}_k$ es combinación lineal de $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k\}$ que es L.I.

Suponiendo que $\bar{y}_k = \bar{0}$ entonces

$$\bar{y}_k = \bar{x}_k - \frac{\langle \bar{x}_k \cdot \bar{y}_1 \rangle}{\langle \bar{y}_1, \bar{y}_1 \rangle}\bar{y}_1 - \frac{\langle \bar{x}_k, \bar{y}_2 \rangle}{\langle \bar{y}_2, \bar{y}_2 \rangle}\bar{y}_2 - \cdots - \frac{\langle \bar{x}_k - \bar{y}_{k-1} \rangle}{\langle \bar{y}_{k-1}, \bar{y}_{k-1} \rangle}\bar{y}_{k-1} = \bar{0}$$

entonces

$$\bar{x}_k = \alpha_1\bar{y}_1 + \alpha_2\bar{y}_2 + \cdots + \alpha_{k-1}\bar{y}_{k-1}$$

y $\{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_{k-1}, \bar{x}_k\}$ es L.D. contradice el hecho de que $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k\}$ es L.I.

(b) $\bar{y}_k$ es ortogonal a cada $\bar{y}_i$ para $1 \leq i \leq k-1$

$$\langle \bar{y}_k, \bar{y}_i \rangle = \langle \bar{x}_k, \bar{y}_i \rangle - \frac{\langle \bar{x}_k, \bar{y}_i \rangle}{\langle \bar{y}_i, \bar{y}_i \rangle}\langle \bar{y}_i, \bar{y}_i \rangle = \langle \bar{x}_k, \bar{y}_i \rangle - \langle \bar{x}_k, \bar{y}_i \rangle = 0$$

Luego $\{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_k\}$ es un conjunto de vectores no nulos mutuamente ortogonales.

Entonces por inducción $\{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n\}$ es un conjunto de vectores no nulos mutuamente ortogonales

◇

Nota

1) Este procedimiento para convertir una base arbitraria en una base ortonormal se conoce como "Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt" y en forma abreviada escribimos "proceso de G–S"

2) Una consecuencia interesante de las ecuaciones de Gram–Schmidt es que:

   Si en una base $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$ de V_n, $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_r\}$ ya son mutuamente ortogonales entonces se toma $\bar{y}_1 = \bar{x}_1, \bar{y}_2 = \bar{x}_2, \ldots, \bar{y}_r = \bar{x}_r$ y se comienza el proceso desde $\bar{x}_{r+1}, \ldots, \bar{x}_n$.

3) Para obtener vectores ortogonales con componentes enteras usamos el hecho de que:

   "Los vectores no nulos $\bar{x}$ e $\bar{y}$ son ortogonales si y sólo si $\bar{x}$ y $r\bar{y}$ son ortogonales y $r \neq 0$".

4) Si el espacio vectorial en estudio es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ asumiremos que el producto interior es el producto escalar o producto interior euclidiano a no ser que se especifique lo contrario.

Ejemplo 6.92

Sea $\mathbb{R}^3$ con producto interior euclidiano. Usar el proceso de G–S para transformar la base $B = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$ en una base ortonormal donde: $\bar{x}_1 = (1,1,1), \bar{x}_2 = (-1,1,0), \bar{x}_3 = (1,2,1)$

$$\bar{y}_1 = \bar{x}_1 = (1,1,1)$$
$$\bar{y}_2 = \bar{x}_2 = (-1,1,0)$$
$$\bar{y}_3 = \bar{x}_3 - \frac{\bar{x}_3 \cdot \bar{y}_1}{|\bar{y}_1|^2}\bar{y}_1 - \frac{\bar{x}_3 \cdot \bar{y}_2}{|\bar{y}_2|^2}\bar{y}_2$$
$$\bar{y}_3 = (1,2,1) - \frac{4}{3}(1,1,1) - \frac{1}{2}(-1,1,0) = (1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2}, 2 - \frac{4}{3} - \frac{1}{2}, 1 - \frac{4}{3})$$
$$\bar{y}_3 = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{2}{6}) \Longrightarrow \bar{y}_3 = (1,1,-2)$$

$$B_1 = \{\frac{\bar{y}_1}{|Y_1|}, \frac{\bar{y}_2}{|Y_2|}, \frac{\bar{y}_3}{|Y_3|}\}$$

es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$

$$B_1 = \{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)\}$$

es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$

Ejemplo 6.93

Sea $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$ donde $\bar{u}_1 = (0,2,1,0), \bar{u}_2 = (1,-1,0,0), \bar{u}_3 = (1,2,0,-1), \bar{u}_4 = (1,0,0,1)$. Transformar B en una base ortonormal.

Observamos que $\bar{u}_3 \cdot \bar{u}_4 = 0$ entonces

$$\bar{v}_1 = \bar{u}_4 = (1,0,0,1)$$

$$\bar{v}_2 = \bar{u}_3 = (1,2,0,-1)$$

$$\bar{v}_3 = \bar{u}_2 - \frac{\bar{u}_2 \cdot \bar{v}_1}{|\bar{v}_1|^2}\bar{v}_1 - \frac{\bar{u}_2 \cdot \bar{v}_2}{|\bar{v}_2|^2}\bar{v}_2$$

$$\bar{v}_3 = (1,-1,0,0) - \frac{1}{2}(1,0,0,1) + \frac{1}{6}(1,2,0,-1) = \frac{1}{6}(4,-4,0,-4)$$

$$\bar{v}_3 = (1,-1,0,-1)$$

$$\bar{v}_4 = \bar{u}_1 - \frac{\bar{u}_1 \cdot \bar{v}_1}{|\bar{v}_1|^2}\bar{v}_1 - \frac{\bar{u}_1 \cdot \bar{v}_2}{|\bar{v}_2|^2}\bar{v}_2 - \frac{\bar{u}_1 \cdot \bar{v}_3}{|\bar{v}_3|^2}\bar{v}_3$$

$$\bar{v}_4 = (0,2,1,0) - 0 - \frac{4}{6}(1,2,0,-1) + \frac{2}{3}(1,-1,0,-1) = (0,0,1,0)$$

$\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ y $\{\frac{\bar{v}_1}{|\bar{v}_1|}, \frac{\bar{v}_2}{|\bar{v}_2|}, \frac{\bar{v}_3}{|\bar{v}_3|}, \frac{\bar{v}_4}{|\bar{v}_4|}\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ donde

$$\frac{\bar{v}_1}{|\bar{v}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1), \qquad \frac{\bar{v}_2}{|\bar{v}_2|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,0,-1)$$

$$\frac{\bar{v}_3}{|\bar{v}_3|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,0,-1), \qquad \frac{\bar{v}_4}{|\bar{v}_4|} = (0,0,1,0)$$

Ejemplo 6.94

Sean $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vectores de $\mathbb{R}^3$ con producto interior

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = u_1 v_1 + 2u_2 v_2 + 3u_3 v_3$$

usar el proceso de G–S para transformar la base $B = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$ en una base ortonormal, donde $\bar{x}_1 = (1,1,1), \bar{x}_2 = (1,1,0), \bar{x}_3 = (1,0,0)$

$$\bar{y}_1 = \bar{x}_1 = (1,1,1)$$

$$\bar{y}_2 = \bar{x}_2 - \frac{\langle \bar{x}_2, \bar{y}_1 \rangle}{\langle \bar{y}_1, \bar{y}_1 \rangle} \bar{y}_1 = (1,1,0) - \frac{3}{6}(1,1,1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \Longrightarrow \bar{y}_2 = (1,1,-$$

$$\bar{y}_3 = \bar{x}_3 - \frac{\langle \bar{x}_3, \bar{y}_1 \rangle}{\langle \bar{y}_1, \bar{y}_1 \rangle} \bar{y}_1 - \frac{\langle \bar{x}_3, \bar{y}_2 \rangle}{\langle \bar{y}_2, \bar{y}_2 \rangle} \bar{y}_2$$

$$\bar{y}_3 = (1,0,0) - \frac{1}{6}(1,1,1) - \frac{1}{6}(1,1,-1) = (\frac{4}{6}, -\frac{2}{6}, 0)$$

$$\bar{y}_3 = (2,-1,0)$$

$$\langle \bar{y}_1, \bar{y}_2 \rangle = (1)(1) + 2(1)(1) + 3(1)(-1) = 0$$
$$\langle \bar{y}_2, \bar{y}_3 \rangle = (1)(2) + 2(1)(-1) + 3(-1)(0) = 0$$
$$\langle \bar{y}_1, \bar{y}_3 \rangle = (1)(2) + 2(1)(-1) + 3(1)(0) = 0$$

$\{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3\}$ son vectores ortogonales de $\mathbb{R}^3$

$\{\frac{\bar{y}_1}{|\bar{y}_1|}, \frac{\bar{y}_2}{|\bar{y}_2|}, \frac{\bar{y}_3}{|\bar{y}_3|}\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ donde

$$\frac{\bar{y}_1}{|\bar{y}_1|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,1), \quad \frac{\bar{y}_2}{|\bar{y}_2|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-1), \quad \frac{\bar{y}_3}{|\bar{y}_3|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,0)$$

Ejemplo 6.95

Sea $\mathbb{P}_2$ el espacio con producto interior determinado por la base estándar. ¿Cuále de los siguientes conjuntos son ortogonales?

1) $\{1 + x + x^2, -2 + x + x^2, -x + x^2\}$

2) $\{1, x + x^2, x^2\}$

1) $\langle p_1, p_2 \rangle = (p_1)_B \cdot (p_2)_B$ es el producto interior determinado por la base *I*

(B base estándar de $\mathbb{P}_2$)

$$p_1(x) = 1 + x + x^2 \Longrightarrow (p_1)_B = (1, 1, 1)$$
$$p_2(x) = -2 + x + x^2 \Longrightarrow (p_2)_B = (-2, 1, 1)$$
$$p_3(x) = -x + x^2 \Longrightarrow (p_3(x))_B = (0, -1, 1)$$

$$\langle p_1, p_2 \rangle = (1, 1, 1) \cdot (-2, 1, 1) = 0$$
$$\langle p_1, p_3 \rangle = (1, 1, 1) \cdot (0, -1, 1) = 0$$
$$\langle p_2, p_3 \rangle = (-2, 1, 1) \cdot (0, -1, 1) = 0$$

$B_1 = \{p_1, p_2, p_3\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{P}_2$

$B_1' = \{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{x^2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{x}{\sqrt{6}} + \frac{x^2}{\sqrt{6}}, -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x^2}{\sqrt{2}}\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{P}_2$

2) $\{1, x + x^2, x^2\}$

$\langle p_1, p_2 \rangle = (p_1)_B \cdot (p_2)_B$ es el producto interior determinado por la base B (B base estándar de $\mathbb{P}_2$)

$$p_1(x) = 1 \Longrightarrow (p_1(x))_B = (1, 0, 0)$$
$$p_2(x) = x + x^2 \Longrightarrow (p_2(x))_B = (0, 1, 1)$$
$$p_3(x) = x^2 \Longrightarrow (p_3(x))_B = (0, 0, 1)$$

$B_2 = \{p_1, p_2, p_3\}$ no es una base ortogonal de $\mathbb{P}_2$

(a) Aplicamos el proceso de G–S para convertir B_2 en una base ortonormal.

$$q_1 = p_1 = (1, 0, 0)$$
$$q_2 = p_2 = (0, 1, 1)$$
$$q_3 = p_3 - \frac{\langle p_3, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle} q_1 - \frac{\langle p_3, q_2 \rangle}{\langle q_2, q_2 \rangle} q_2$$
$$q_3 = (0, 0, 1) - 0 - \frac{1}{2}(0, 1, 1) = (0, -\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2}) = (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$
$$q_3 = (0, -1, 1)$$

$B_2' = \{q_1, q_2, q_3\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{P}_2$

$B_2'' = \{1, \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}x^2, -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}x^2\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{P}_2$

(b) Aprovechamos esta base ortonormal para expresar el vector $p(x) = 7 - 4x + 5x^2$ con respecto a la base B_2''

$$r_1 = \langle p, q_1 \rangle = (7, -4, 5) \cdot (1, 0, 0) = 7$$
$$r_2 = \langle p, q_2 \rangle = (7, -4, 5) \cdot (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$r_3 = \langle p, q_3 \rangle = (7, -4, 5) \cdot (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{9}{\sqrt{2}}$$

$(p(x))_{B_2''} = (7, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{9}{\sqrt{2}})$, expresado como polinomio

$$(p(x))_{B_2''} = 7 + \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{9}{\sqrt{2}}x^2$$

Ejemplo 6.96

Sea $B = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ la base estándar u ordinaria de $\mathbb{M}_{22}$ con producto interior

$$\langle M, N \rangle = (M)_B \cdot (N)_B$$

¿Cuáles de los siguientes conjuntos son ortonormales?

1) $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \right\}$

2) $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

En efecto:

1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_B = (1, 0, 0, 0), \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}_B = (0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}_B = (0, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}_B = (0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$$

Los vectores son mutuamente ortogonales y todos tienen longitud 1 entonces B_1 es una base ortonormal de $\mathbb{M}_{22}$

2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_B = (1,0,0,0), \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_B = (0,1,0,0)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_B = (0,0,1,1) \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_B = (0,0,1,-1)$$

Los vectores son mutuamente ortogonales, mas no son ortonormales

Por lo tanto B_2 es una base ortogonal.

Normalizando tenemos:

$B_2' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{M}_{22}$.

Aprovechamos el ejemplo para expresar la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{22}$$

con respecto a la base $B_2' = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$

$$r_1 = \langle M, N_1 \rangle = (6,-3,4,1) \cdot (1,0,0,0) = 6$$

$$r_2 = \langle M, N_2 \rangle = (6,-3,4,1) \cdot (0,1,0,0) = -3$$

$$r_3 = \langle M, N_3 \rangle = (6,-3,4,1) \cdot (0,0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$r_4 = \langle M, N_4 \rangle = (6,-3,4,1) \cdot (0,0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$(M)_{B_2'} = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ \frac{5}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 6.97

Sean $\bar{a} = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}})$ y $\bar{b} = (\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}})$ vectores en $\mathbb{R}^2$ D.q. $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ es ortonormal si $\mathbb{R}^2$ tiene el producto interior $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$, pero no es ortonormal

si $\mathbb{R}^2$ tiene el producto interior euclidiano.

$$\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = 3(\frac{1}{\sqrt{5}})(\frac{2}{\sqrt{30}}) + 2(\frac{-1}{\sqrt{5}})(\frac{3}{\sqrt{30}}) = 0$$

$\bar{a}$ es ortogonal a $\bar{b}$ con el producto interior definido

$$\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle = 3(\frac{1}{\sqrt{5}})(\frac{1}{\sqrt{5}}) + 2(\frac{-1}{\sqrt{5}})(\frac{-1}{\sqrt{5}}) = 1$$
$$\langle \bar{b}, \bar{b} \rangle = 3(\frac{2}{\sqrt{30}})(\frac{2}{\sqrt{30}}) + 2(\frac{3}{\sqrt{30}})(\frac{3}{\sqrt{30}}) = \frac{12}{30} + \frac{18}{30} = 1$$

Por lo tanto $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ es ortonormal en $\mathbb{R}^2$ con el producto interior definido.
Si en $\mathbb{R}^2$ consideramos el producto interior euclidiano

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}) \cdot (\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}) = \frac{2}{5\sqrt{6}} - \frac{3}{5\sqrt{6}} = \frac{-1}{5\sqrt{6}} \neq 0$$

$\bar{a}$ no es ortogonal a $\bar{b}$.
Por lo tanto $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ no es ortonormal en $\mathbb{R}^2$ con el producto interior euclidiano (producto escalar o producto punto en $\mathbb{R}^2$).

6.17 Ejercicios propuestos

1) En $\mathbb{R}^2$ con producto interior euclidiano, indicar cuáles de los siguientes conjuntos son ortonormales

(a) $\{(2,8), (4,-1)\}$

(b) $\{(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}), (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}})\}$

(c) $\{(3,4), (-4,3)\}$

Rpta: (b)

2) En $\mathbb{R}^3$ con producto interior euclidiano, indicar cuáles de los siguientes conjuntos son ortonormales.

(a) $\{(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}), (0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$

(b) $\{(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3})\}$

(c) $\{(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}})\}$

3) En $\mathbb{P}_2$ con el producto interior $\langle p, q\rangle = (p)_B \cdot (q)_B$ donde B es la base estándar de $\mathbb{P}_2$, indicar cuáles de los siguientes conjuntos son ortonormales.

(a) $\{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}x, -\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}}x + \frac{2}{\sqrt{6}}x^2, \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}x^2\}$

(b) $\{\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}x, -\frac{6}{\sqrt{70}} + \frac{3}{\sqrt{70}}x + \frac{5}{\sqrt{70}}x^2\}$

(c) $\{1 + x - x^2, 1 + x^2, 1 - x\}$

Rpta: (a),(b)

4) En $\mathbb{M}_{22}$ con producto interior $\langle M, N\rangle = (M)_B \cdot (N)_B$ donde B es la base estándar de $\mathbb{M}_{22}$, indicar si los siguientes conjuntos son ortonormales

(a) $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix}1 & -4\\ 3 & 3\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\}$

(b) $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}\right\}$

(c) $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\}$

5) En $\mathbb{C}$ con producto interior $\langle z_1, z_2\rangle = x_1x_2 + y_1y_2$ donde $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$, $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ indicar si los siguientes conjuntos son ortonormales

(a) $\{2 + 3i, -3 + 2i\}$

(b) $\{1, i\}$

(c) $\{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\}$

Rpta: (b) y (c)

6) En $\mathbb{R}^2$ con el producto interior euclidiano, utilizar el proceso de G–S para transformar la base $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ en una base ortonormal.

(a) $\bar{x}_1 = (1, -3),\ \bar{x}_2 = (2, 5)$

Rpta: $\{\frac{1}{\sqrt{10}}(1, -3), \frac{1}{\sqrt{10}}(3, 1)\}$

(b) $\bar{x}_1 = (1, 0),\ \bar{x}_2 = (1, 1)$

7) En $\mathbb{R}^3$ con producto interior euclidiano, utilizar el proceso de G–S para transformar la base $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$ en una base ortonormal.

(a) $\bar{x}_1 = (1, 2, 3), \bar{x}_2 = (-1, 0, 3), \bar{x}_3 = (1, 1, 1)$

Rpta: $\{\frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3), \frac{1}{\sqrt{266}}(-11, -8, 9), \frac{1}{\sqrt{19}}(3, -3, 1)$

(b) $\bar{x}_1 = (1, 0, 1), \bar{x}_2 = (2, 3, 0), \bar{x}_3 = (2, -1, 3)$

8) En $\mathbb{P}_2$ con producto interior del Ejercicio 3), donde B es la base estándar utilizar el proceso de G–S para transformar la base $\{p_1, p_2, p_3\}$ en una base ortonormal.

(a) $\{p_1(x) = 1 + x + x^2, p_2(x) = -1 + x, p_3(x) = 1 + 2x + x^2\}$

Rpta: $\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1 + x + x^2), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + x), \frac{1}{\sqrt{6}}(1 + x - 2x^2\}$

(b) $\{p_1(x) = 1, p_2(x) = 3 - 7x - 2x^2, p_3(x) = 4x + x^2\}$

9) En $\mathbb{M}_{22}$ con producto interior del Ejercicio 4), donde B es la base estándar utilizar el proceso de G–S para transformar la base $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ en una base ortonormal

(a) $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Rpta: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$

(b) $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

10) En $\mathbb{C}$ un producto interior del Ejercicio 5) donde B es la base estándar, utiliz el proceso de G–S para transformar la base $\{z_1, z_2\}$ en una base ortonormal

(a) $z_1 = 1 - 7i,\ z_2 = 2 + 3i$

Rpta: $\{\frac{1}{\sqrt{50}}(1 - 7i), \frac{1}{\sqrt{50}}(7 +$

(b) $z_1 = 3 + i,\ z_2 = 4 - i$

11) En $\mathbb{R}^3$ con producto interior euclidiano, determinar una base ortonormal para el subespacio generado por $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ donde:

(a) $\bar{x}_1 = (3, -1, 0)$, $\bar{x}_2 = (0, 2, 1)$

Rpta: $\{\frac{1}{\sqrt{10}}(3, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{115}}(-3, 9, 5)\}$

(b) $\bar{x}_1 = (1, 1, 1)$, $\bar{x}_2 = (-1, 1, 2)$

12) En $\mathbb{P}_2$ con el producto interior del Ejercicio 3) determinar una base ortonormal para el subespacio generado por $\{p_1, p_2\}$ donde:

(a) $p_1(x) = 2 - x + x^2$, $q(x) = (1 + x)$

Rpta: $\{\frac{1}{\sqrt{6}}(2 - x + x^2), \frac{1}{\sqrt{66}}(4 + 7x - x^2)\}$

(b) $p_2(x) = 1 + x - x^2$, $q(x) = 2 - 3x + x^2$

13) En $\mathbb{M}_{22}$ con el producto interior del Ejercicio 4), determinar una base ortonormal para el subespacio generado por $\{M_1, M_2, M_3\}$

(a) $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Rpta: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

(b) $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

14) En $\mathbb{R}^3$ con producto interior

$$\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = a_1 b_1 + 2a_2 b_2 + 3a_3 b_3$$

utilizar el proceso de G–S para transformar la base $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$ en una base ortonormal

(a) $\{\bar{x}_1 = (1, 0, 0), \bar{x}_2 = (1, 1, 0), \bar{x}_3 = (1, 1, 1)\}$

Rpta: $\{(1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 0, 1)\}$

(b) $\{\bar{x}_1 = (1, 0, 1), \bar{x}_2 = (-1, 1, -1), \bar{x}_3 = (2, 4, 0)\}$

15) En el Ejercicio 8), si $p(x) = 2 - 3x + 5x^2$, calcular $(p(x))_B$ cuando B es la base ortonormal de $\mathbb{P}_2$ en 8a)

Rpta: $(p(x))_B = \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{5}{\sqrt{2}}x - \frac{11}{\sqrt{6}}x^2$

16) En el Ejercicio 9), si

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

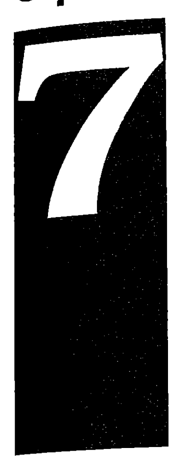
calcular $(M)_B$ cuando B es la base ortonormal de $\mathbb{M}_{22}$ en 9a)

17) En el Ejercicio 10) si $z = 15 - 7i$. Calcular $(z)_B$ cuando B es la base ortonormal de $\mathbb{C}$ en 10b)

Rpta: $(z)_B = \frac{2}{\sqrt{10}}(19 + 18i)$

18) En el Ejercicio 7), si $\bar{x} = (7, -2, 5)$. Calcular $(\bar{x})_B$ cuando B es la base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ en 7a)

Capítulo



TRANSFORMACIONES LINEALES

El principal objetivo del álgebra lineal lo constituyen los espacios vectoriales de dimensión finita y las aplicaciones definidas entre ellos.

Después de conocer los espacios vectoriales pasamos a analizar una clase de funciones entre ellos que conservan las operaciones definidas. Esta clase importante de funciones entre espacios vectoriales se denominan transformaciones lineales.

Una función es una regla o correspondencia que asigna a los elementos del conjunto de partida ciertos elementos del conjunto de llegada. Las funciones se emplean en muchas áreas de las matemáticas y son importantes para descubrir la relación de una variable con otra. Por ejemplo, la altura que alcanza un proyectil es una función del tiempo, el costo total de producción de un producto es una función del número de artículos y así sucesivamente.

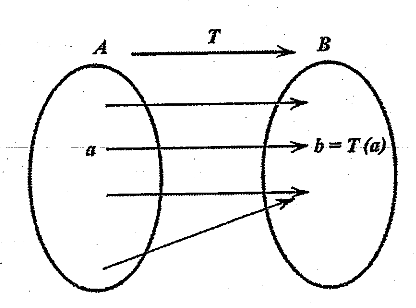
El término transformación se usará como sinónimo de función, aplicación o mapeo.

Definición 7.1

Sean A y B dos conjuntos no vacíos arbitrarios. **Una transformación T de A en B**, que se denota por $T : A \longrightarrow B$ es una aplicación, regla o correspondencia que asigna a cada elemento a de A un único elemento b de B.

A se llama **dominio de T** y B es el **codominio**.

La notación $A \overset{T}{\longmapsto} B$ ó $T(a) = b$ indica que b es la **imagen de** a **bajo** T y a es la **preimagen de** b.



Definición 7.2

$T : A \longrightarrow B$ es una **transformación uno a uno** o **inyectiva** si $T(a_1) = T(a_2) \Longrightarrow a_1 = a_2 \; \forall a_1, a_2 \in A$

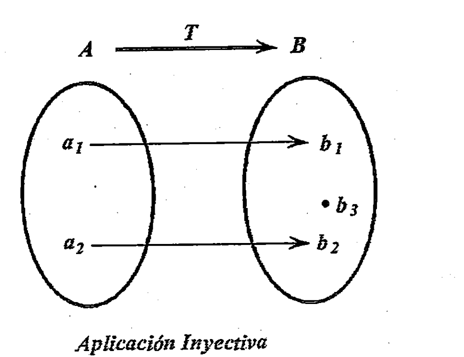
Definición 7.3

$T : A \longrightarrow B$ es una **transformación sobre** o **suryectiva** si $\forall b \in B, \exists a \in A$ tal que $T(a) = b$

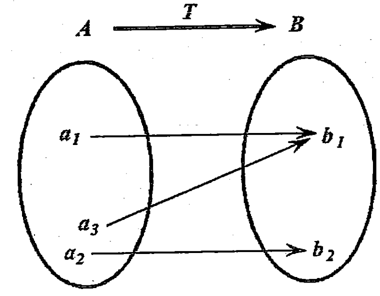
Definición 7.4

$T : A \longrightarrow B$ es una **transformación biyectiva** si es inyectiva y suryectiva.

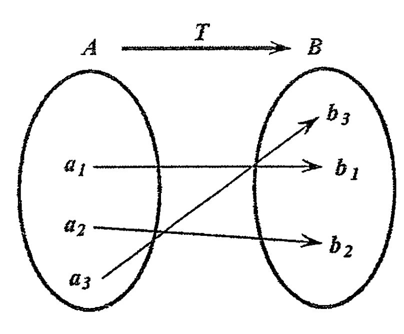
En un esquema:



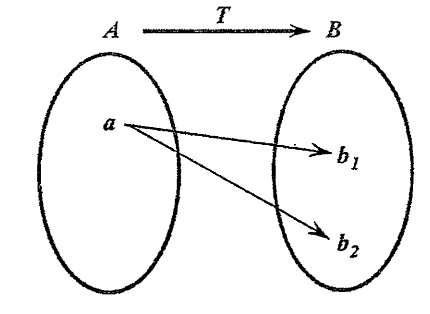
Aplicación Inyectiva



Aplicación Suryectiva



Aplicación Biyectiva



No es Aplicación

Ejemplo 7.1

Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x - 3, y + 1)$ es una transformación y

$$T(-2, 5) = (-2 - 3, 5 + 1) = (-5, 6) \in \mathbb{R}^2$$

Ejemplo 7.2

Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (2x - y, y + 3z)$ es una transformación y

$$T(3, -1, 0) = (7, , -1) \in \mathbb{R}^2$$

Nota

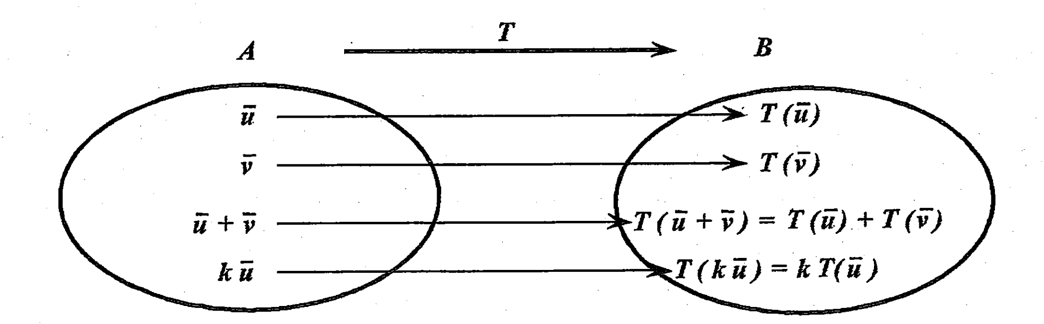
En un espacio vectorial se definen dos operaciones: la adición y la multiplicación por escalares. Las transformaciones o aplicaciones entre espacios vectoriales que conservan estas estructuras lineales según el criterio que se establece a continuación se llaman transformaciones lineales.

Definición 7.5

Sean V y W espacios vectoriales y sea $T : V \longrightarrow W$. Se dice que T es una **transformación lineal** (TL) si:

1) $T(\bar{u} + \bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v}); \forall \bar{u}, \bar{v} \in V$

2) $T(k\bar{u}) = kT(\bar{u}), \forall \bar{u} \in V$ y $\forall k \in \mathbb{R}$



Nota

La primera condición implica que T convierte la suma de los vectores en la suma de las imágenes de los vectores. La segunda condición implica que T convierte el múltiplo escalar de un vector en el múltiplo escalar de la imagen. De este modo las operaciones de adición y multiplicación por un escalar se conservan bajo una TL.

Ejemplo 7.3

Averiguar si la aplicación T del Ejemplo 7.1 es una transformación lineal

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ tal que } T(x, y) = (x - 3, y + 1)$$

1) Sean $\bar{u} = (u_1, u_2)$ y $\bar{v} = (v_1, v_2)$ elementos de $\mathbb{R}^2$ entonces

$$\begin{aligned}
\bar{u} + \bar{v} &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \\
T(\bar{u} + \bar{v}) &= T(u_1 + v_1, u_2 + v_2) \\
&= (u_1 + v_1 - 3, u_2 + v_2 + 1) \\
&= (u_1 - 3, u_2 + 1) + (v_1, v_2) \\
&= T(\bar{u}) + \bar{v}
\end{aligned}$$

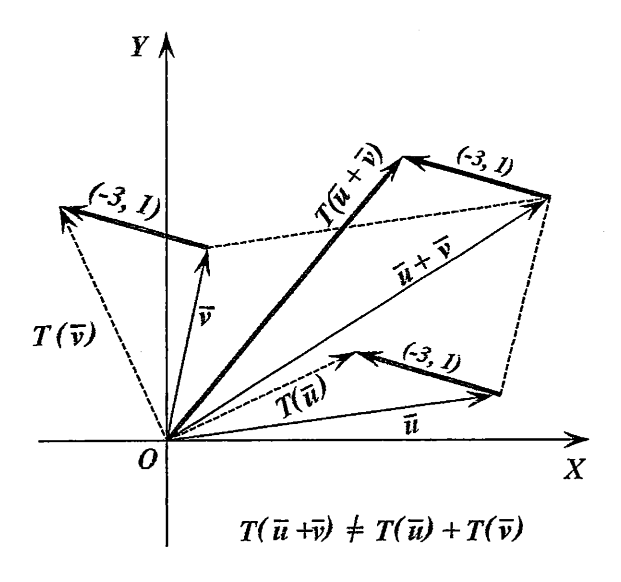
luego $T(\bar{u} + \bar{v}) \neq T(\bar{u}) + T(\bar{v})$ entonces T no es una T.L. puesto que no conserva la operación de adición.

Nota

Basta que falle una de las condiciones para que T no sea una T.L.

Interpretación geométrica: $T(x, y) = (x, y) + (-3, 1)$ representa una traslación puesto que a todo vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ le corresponde $(x, y) + (-3, 1)$. Por tanto la traslación no es una T.L.

Si $T(\bar{u}) = \bar{u}'$ y $T(\bar{v}) = \bar{v}'$



Ejemplo 7.4

Averiguar si la aplicación T del Ejemplo 7.2 es una TL.

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ tal que } T(x, y, z) = (2x - y, y + 3z)$$

1) Sean $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vectores de $\mathbb{R}^3$, entonces

$$\begin{aligned}
\bar{u} + \bar{v} &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)\\
T(\bar{u} + \bar{v}) &= T(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)\\
&= (2(u_1 + v_1) - (u_2 + v_2), (u_2 + v_2) + 3(u_3 + v_3))\\
&= (2u_1 - u_2, u_2 + 3u_3) + (2v_1 - v_2, v_2 + 3v_3)\\
&= T(\bar{u}) + T(\bar{v})
\end{aligned}$$

2) Sea $k\bar{u} = (ku_1, ku_2, ku_3)$; $\forall k \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
T(k\bar{u}) &= T(ku_1, ku_2, ku_3)\\
&= (2ku_1 - ku_2, ku_2 + 3ku_3)\\
&= k(2u_1 - u_2, u_2 + 3u_3)\\
&= k(T(\bar{u}))
\end{aligned}$$

T es una T.L. conserva las dos operaciones.

Ejemplo 7.5

Sea la aplicación $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (y, x)$. Averiguar si T es una T.L.

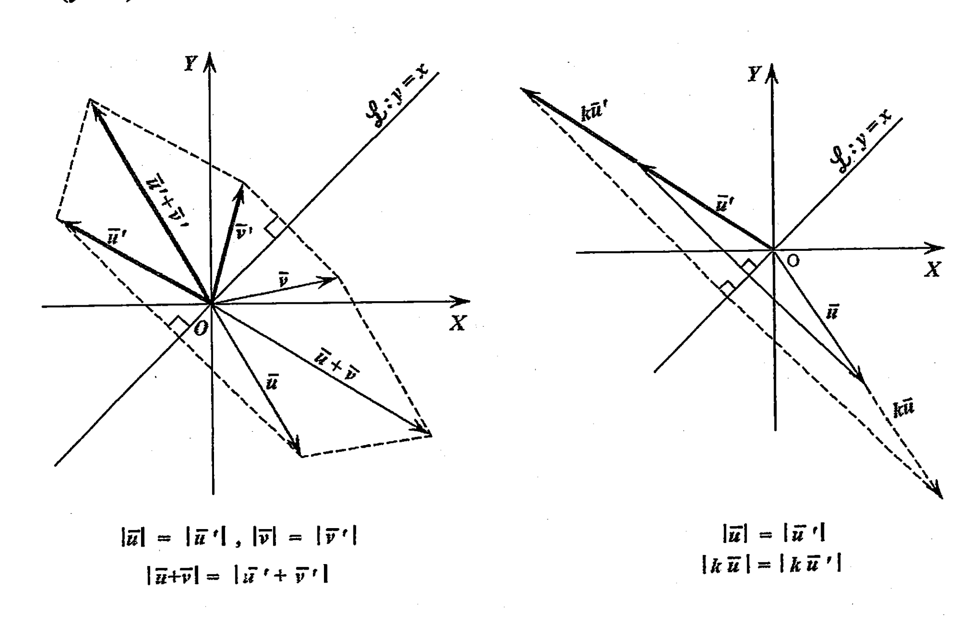
1) Sean $\bar{u} = (x_1, y_1)$ y $\bar{v} = (x_2, y_2)$ elementos de $\mathbb{R}^2$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\bar{u} + \bar{v} &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
T(\bar{u} + \bar{v}) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
&= (y_1 + y_2, x_1 + x_2) \\
&= (y_1, x_1) + (y_2, x_2) \\
&= T(\bar{u}) + T(\bar{v})
\end{aligned}$$

2) Si $k \in \mathbb{R}$ entonces $k\bar{u} = (kx_1, ky_1)$

$$\begin{aligned}
T(k\bar{u}) &= T(kx_1, ky_1) = (ky_1, kx_1) \\
&= k(y_1, x_1) = kT(\bar{u})
\end{aligned}$$

T es una T.L. puesto que conserva las dos operaciones.
Interpretación geométrica: T es una reflexión en la recta $y = x$ puesto que $(x, y) \longmapsto (y, x)$



Ejemplo 7.6

Sea la aplicación $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $T(\bar{u}) = r\bar{u}$ donde $r \in \mathbb{R}$. Averiguar si T es una T.L.

1) $T(\bar{u} + \bar{v}) = r(\bar{u} + \bar{v}) = r\bar{u} + r\bar{v} = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$

2) $T(k\bar{u}) = r(k\bar{u}) = (rk)\bar{u} = k(r\bar{u}) = kT(\bar{u}); \forall k \in \mathbb{R}$

T es una TL puesto que conserva ambas operaciones

Ejemplo 7.7

La aplicación $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x, y, 0)$ es una T.L. puesto que

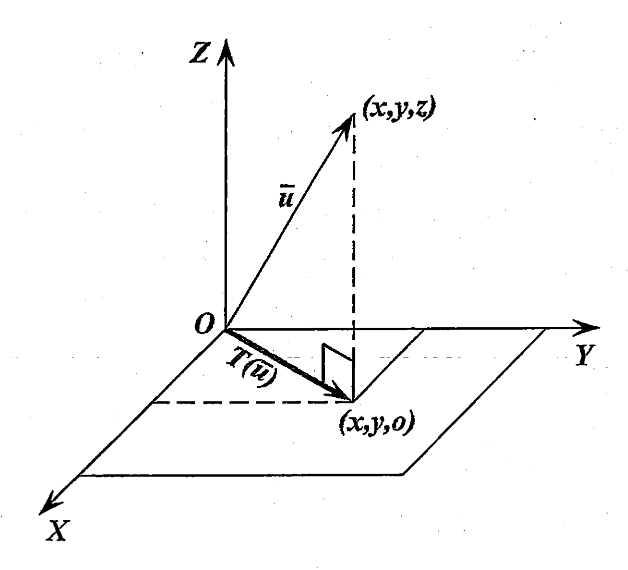
1) $\bar{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\bar{v} = (x_2, y_2, z_2)$ son elementos de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \bar{u} + \bar{v} &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ T(\bar{u} + \bar{v}) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0 + 0) \\ &= (x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0) \\ &= T(\bar{u}) + T(\bar{v}) \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} k\bar{u} &= (kx_1, ky_1, kz_1) \\ T(k\bar{u}) &= T(kx_1, ky_1, kz_1) \\ &= (kx_1, ky_1, 0) = k(x_1, y_1, 0) \; \forall k \in \mathbb{R} \\ &= kT(\bar{u}) \end{aligned}$$

Interpretación geométrica: T representa la proyección ortogonal de un punto (x, y, z) sobre el plano XY



Ejemplo 7.8

La aplicación $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x, y, -z)$ es una T.L. puesto que:

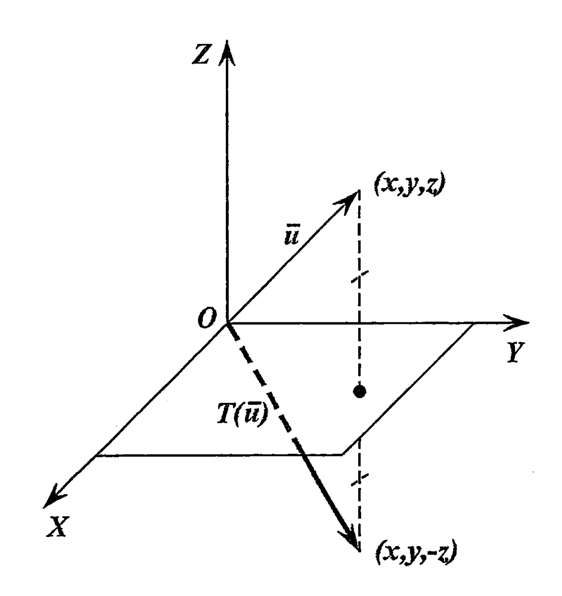
1) $\bar{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\bar{v} = (x_2, y_2, z_2)$ son elementos de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \bar{u} + \bar{v} &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ T(\bar{u} + \bar{v}) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, -(z_1 + z_2)) \\ &= (x_1, y_1, -z_1) + (x_2, y_2, -z_2) \\ &= T(\bar{u}) + T(\bar{v}) \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} k\bar{u} &= (kx_1, ky_1, kz_1) \\ T(k\bar{u}) &= T(kx_1, ky_1, kz_1) \\ &= (kx_1, ky_1, -(kz_1)) \\ &= k(x_1, y_1, -z_1) = kT(\bar{u}) \ \forall k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Interpretación geométrica: T representa todos los puntos simétricos de $\mathbb{R}^3$ con respecto al plano XY



Ejemplo 7.9

La aplicación $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $T(\bar{u}) = \bar{u}\ \forall \bar{u} \in \mathbb{R}^n$ llamada **transformación identidad** es una TL puesto que:

1) $T(\bar{u} + \bar{v}) = \bar{u} + \bar{v} = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$

2) $T(k\bar{u}) = k\bar{u} = kT(\bar{u});\ \forall k \in \mathbb{R}$

Ejemplo 7.10

La aplicación $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $T(\bar{u}) = \bar{0}; \forall \bar{u} \in \mathbb{R}^n$ llamada **transformación cero** es una T.L. puesto que

1) $T(\bar{u} + \bar{v}) = \bar{0} = \bar{0} + \bar{0} = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$

2) $T(k\bar{u}) = \bar{0} = k\bar{0} = kT(\bar{u}); \forall k \in \mathbb{R}$

Ejemplo 7.11

$\mathbb{P}_n =$ {espacio de los polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes reales} y sea $T : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ definida por $T(a_0 + a_1x) = 3a_1 - a_0x + (a_1 + 3a_0)x^2$, ¿$T$ es una TL?

1) Sean $p_1(x) = b_0 + b_1x$ y $p_2(x) = c_0 + c_1x$ elementos de $\mathbb{P}_1$

$$p_1(x) + p_2(x) = (b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)x$$

$$\begin{aligned} T(p_1+p_2) &= T((b_0+c_0)+(b_1+c_1)x) \\ &= 3(b_1+c_1)-(b_0+c_0)x+((b_1+c_1)+3(b_0+c_0))x^2 \\ &= [3b_1-b_0x+(b_1+3b_0)x^2]+[3c_1-c_0x+(c_1+3c_0)x^2 \\ &= T(p_1)+T(p_2) \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} kp_1(x) &= k(b_0+b_1x) = kb_0+(kb_1)x \\ T(kp_1) &= T(kb_0+(kb_1)x) \\ &= 3(kb_1)-(kb_0)x+(kb_1+3(kb_0))x^2 \\ &= k(3b_1-b_0x+(b_1+3b_0)x^2) \\ &= kT(p_1) \end{aligned}$$

por lo tanto T es una TL puesto que conserva las dos operaciones.

Ejemplo 7.12

$\mathbb{C}$ = {espacio de los números complejos} y sea $T:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ tal que $T(a+bi)=(5b-a)+(a+b)i$ donde $a,b\in\mathbb{R}$

T es una T.L. puesto que:

1) $z_1=a_1+b_1i$ y $z_2=a_2+b_2i$ son elementos de $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} z_1+z_2 &= (a_1+a_2)+(b_1+b_2)i \\ T(z_1+z_2) &= T((a_1+a_2)+(b_1+b_2)i) \\ &= (5(b_1+b_2)-(a_1+a_2))+((a_1+a_2)+(b_1+b_2))i \\ &= ((5b_1-a_1)+(a_1+b_1)i)+((5b_2-a_2)+(b_1+b_2)i) \\ &= T(z_1)+T(z_2) \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} kz_1 &= k(a_1+b_1i) = ka_1+(kb_1)i \\ T(kz_1) &= T(ka_1+(kb_1)i) \end{aligned}$$

$$= (5(kb_1) - (ka_1)) + (ka_1 + kb_1)i$$
$$= k[(5b_1 - a_1) + (a_1 + b_1)i]$$
$$= kT(z_1)$$

Ejemplo 7.13

$\mathbb{M}_{22}$ = {espacio de las matrices cuadradas de orden 2 con elementos reales} Sea $T : \mathbb{M}_{22} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Averiguar si T es una T.L.

1) $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ y $M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ son elementos de $\mathbb{M}_{22}$

$$M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} T(M_1 + M_2) &= T\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} \\ &= (a_1 + a_2)(d_1 + d_2) - (b_1 + b_2)(c_1 + c_2) \\ &= (a_1d_1 + a_1d_2 + a_2d_1 + a_2d_2) \\ &\quad - (b_1c_1 + b_1c_2 + b_2c_1 + b_2c_2) \\ &= (a_1d_1 - b_1c_1) + (a_2d_2 - b_2c_2) + (a_1d_2 + a_2d_1) \\ &\quad - (b_1c_2 + b_2c_1) \\ &= T(M_1) + T(M_2) + (a_1d_2 + a_2d_1) - (b_1c_2 + b_2c_1) \end{aligned}$$

$T(M_1 + M_2) \neq T(M_1) + T(M_2)$ entonces T no es una T.L. puesto que no conserva la operación de adición.

Ejemplo 7.14

$V = \mathcal{C}[a, b] = \{$espacio de las funciones reales continuas sobre$[a, b]\}$
$W = \mathcal{C}'[a, b] = \{$espacio de las funciones reales con primera derivada continua sobre $[a, b]\}$
la aplicación $D : W \longrightarrow V$ definida por $D(f) = f'$ es una T.L. puesto que:

1) $D(f + g) = D(f) + D(g) = f' + g'$

2) $D(kf) = kDf = kf'$

Ejemplo 7.15

Sea $\mathcal{C}[0, 1] = \{$espacio de las funciones reales continuas sobre el intervalo $[0, 1]\}$
la aplicación $T : \mathcal{C}[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por: $T(f) = \int_0^1 f(x)dx$ es una T.L.

1) Si $f, g \in \mathcal{C}[0, 1] \Longrightarrow (f + g) \in \mathcal{C}[0, 1]$ entonces

$$\begin{aligned} T(f+g) &= \int_0^1 (f+g)(x)dx \\ &= \int_0^1 (f(x) + g(x))dx \\ &= \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx \\ &= T(f) + T(g) \end{aligned}$$

2) Si $f \in \mathcal{C}[0, 1] \Longrightarrow kf \in \mathcal{C}[0, 1]; \forall k \in \mathbb{R}$

$$T(kf) = \int_0^1 (kf)(x)dx = \int_0^1 kf(x)dx = k\int_0^1 f(x)dx = kT(f)$$

Ejemplo 7.16

Si A es una matriz fija de orden $m \times n$ y si se considera a los vectores en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ como matrices columna entonces la aplicación $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $T(\bar{x}) = A\bar{x}$ llamada **transformación matricial** es una T.L.

1) Sean $\bar{u}, \bar{v}$ matrices columna en $\mathbb{R}^n \Longrightarrow \bar{u} + \bar{v} \in \mathbb{R}^n$.

$$T(\bar{u} + \bar{v}) = A(\bar{u} + \bar{v}) = A\bar{u} + A\bar{v} = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$$

2) $k\bar{u}$ es una matriz columna de $\mathbb{R}^n$; $\forall k \in \mathbb{R}$

$$T(k\bar{u}) = A(k\bar{u}) = k(A\bar{u}) = kT(\bar{u})$$

T conserva las dos operaciones, entonces T es una T.L.

Nota

1) Aquellas transformaciones lineales definidas como en el Ejemplo 7.16 mediante una matriz A se les llama transformaciones matriciales (TM)

2) Acabamos de demostrar que toda transformación matricial (TM) es una transformación lineal (TL)

Veamos un caso especial de TM

Ejemplo 7.17

Sea la transformación matricial $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(\bar{u}) = A\bar{u}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

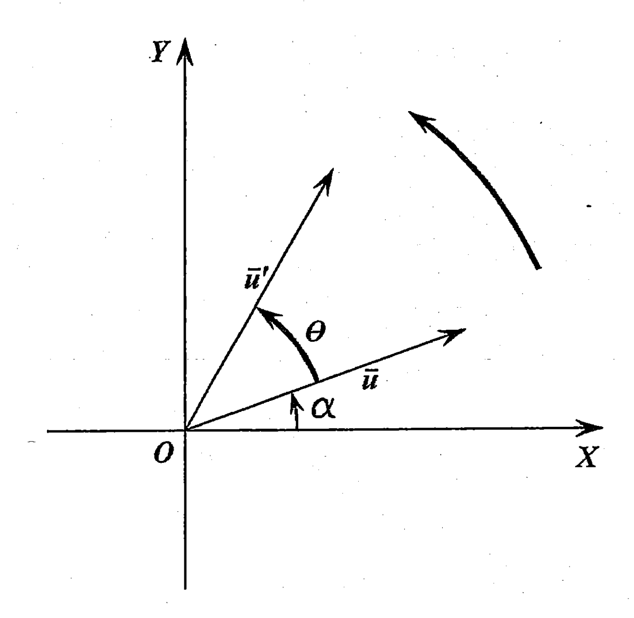
es una matriz cuadrada de orden 2.
Sea

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Entonces

$$T(\bar{u}) = T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \\ x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} = A\bar{u}$$

Interpretación geométrica:
T representa una rotación del vector $\bar{u}$ alrededor del origen, en sentido antihorario y en un ángulo de θ radianes.



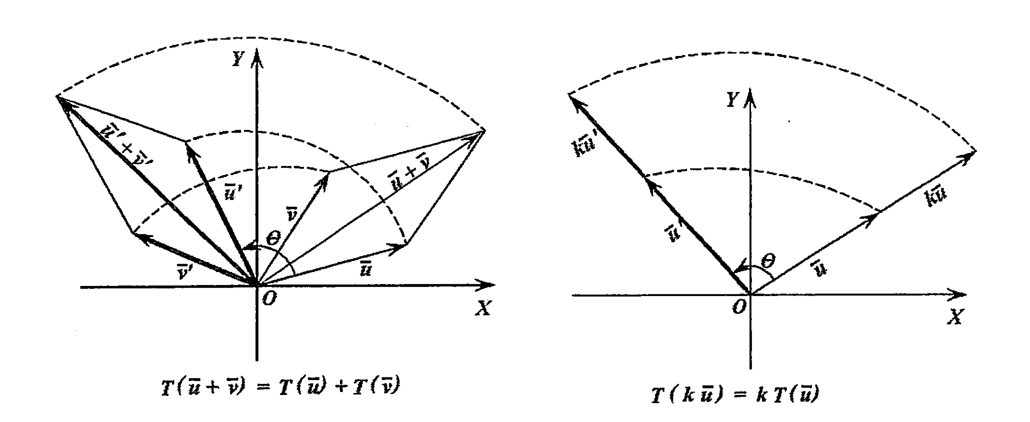
Sea

$$|\bar{u}| = r \Longrightarrow \begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases}$$

Del mismo modo: puesto que $|\bar{u}'| = |\bar{u}| = r$

$$x' = r\cos(\theta+\alpha), \quad y' = \mathrm{sen}(\theta+\alpha)$$

$$\begin{aligned} T(\bar{u}) = \bar{u}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r\cos(\theta+\alpha) \\ r\,\mathrm{sen}(\theta+\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\alpha - r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\alpha + r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta \\ x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\bar{u} \end{aligned}$$



Definición 7.6

Sea $T : V \longrightarrow W$ una T.L. Se dice que T es un **operador lineal** si $V = W$. Es decir, una T.L. de un espacio vectorial se llama operador lineal.

Ejemplo 7.18

Los Ejemplos 7.5, 7.6, 7.7, 7.8, 7.9, 7.10 y 7.12 son ejemplos de operadores lineales

7.1 Ejercicios propuestos

Indicar cuáles de las siguientes aplicaciones son T.L. Justificar la respuesta; si se sabe que:

$$\mathbb{C} = \{\text{espacio de los números complejos}\}$$
$$\mathbb{P}_n = \{\text{espacio de los polinomios de grado} \leq n \text{ con coeficientes reales}\}$$
$$\mathbb{M}_{nn} = \{\text{espacio de las matrices cuadradas de orden } n \text{ con elementos reales}\}$$
$$C[a,b] = \{\text{espacio de las funciones reales continuas sobre } [a,b]\}$$
$$\mathbb{M}_{mn} = \{\text{espacio de las matrices de orden } m \times n \text{ con elementos reales}\}$$

1) $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $T(a+bi) = a - bi$

Rpta: TL (operador lineal)

2) $T : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ tal que $T(ax+b) = ax^2 + bx$

3) $T : \mathbb{M}_{22} \longrightarrow \mathbb{M}_{22}$ tal que $T(A) = A^{-1}$

Rpta: no es TL

4) $F : \mathbb{M}_{22} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

5) $F : \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ tal que $F(a_0+a_1x+a_2x^2) = a_o+(a_1+a_2)x-(2a_0+3a_1)x^2$

Rpta: TL (operador lineal)

6) $F : \mathbb{M}_{22} \longrightarrow \mathbb{M}_{22}$ tal que $F(A) = MA + AM$ donde

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

7) $T : \mathbb{M}_{nn} \longrightarrow \mathbb{M}_{nn}$ tal que $T(A) = M + A$ donde M es una matriz arbitraria de M_{nn}

Rpta: no es TL

8) $T : \mathbb{M}_{22} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a - 3b + 2d - c$$

9) $T : \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ tal que $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 - 3) + a_1x + a_2x^2$

Rpta: no es T.L.

10) $F : \mathbb{M}_{22} \longrightarrow \mathbb{M}_{23}$ tal que $F(A) = AB$ donde B es un matriz fija de orden 2×3.

11) $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

Rpta: TL

12) $F : \mathbb{M}_{nn} \longrightarrow \mathbb{M}_{nn}$ tal que $F(A) = A^T A$

13) $T : \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_4$ tal que $T(p(x)) = (p(x))^2$

Rpta: no es TL

14) $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $T(z) = 3\bar{z} + z - 1$

15) $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{M}_{22}$ tal que

$$T(a+bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Rpta: TL

16) $F : \mathbb{M}_{22} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$$

17) $F : \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_3$ tal que $F(p(x)) = xp(x) + x^2$

Rpta: no es TL

18) $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $F(x, y, z) = (x + y) + (2y - z)i$

19) $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{M}_{22}$ tal que

$$T(x+iy) = \begin{pmatrix} x & x-y \\ x+y & y \end{pmatrix}$$

Rpta: TL

20) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $T(x, y, z) = |x + y - z|$ con $x + y > z$

21) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (x + y, |x + y - z|)$ si $x > y > z$

Rpta: no es TL

22) $F : \mathbb{M}_{nn} \longrightarrow \mathbb{M}_{nn}$ tal que $F(A) = (I + A)(I - A)^{-1} - (I - A)^{-1}(I + A)$
donde A es una matriz no singular, I matriz identidad

23) $F : C[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(f) = \int_a^b f(t)dt$

Rpta: TL

24) $L : \mathbb{M}_{22} \longrightarrow \mathbb{P}_3$ tal que

$$L\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = d + cx + bx^2 + ax^3$$

25) $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $L(x, y, z) = (-2xy, 3z)$

Rpta: no es TL

26) $L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $L(a + bi) = 3a - 2bi$

27) $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}_3$ tal que $T(a + bi) = ax^2 + bx$

Rpta: TL

28) $T : \mathbb{M}_{22} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

29) $G \circ F : V \longrightarrow W$ tal que $(G \circ F)(\bar{v}) = G(F(\bar{v}))$ donde G, F son TL y V y W espacios vectoriales.

Rpta: TL

30) $T : \mathbb{M}_{33} \longrightarrow \mathbb{M}_{33}$ tal que $T(M) = F_{23}(-3)F_2(4)F_{21}M$ donde $M \in \mathbb{M}_{33}$ y $F_{st}(k)$, $F_s(k)$, F_{st} son matrices elementales fila de orden 3.

31) $T : C[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $T(f) = f(0) + 1$

Rpta: no es TL

7.2 Propiedades de las T.L. Núcleo e imagen

Teorema 7.1

Sea $T : V \longrightarrow W$ una T.L. entonces:

1) $T(\bar{0}) = \bar{0}$

2) $T(-\bar{v}) = -T(\bar{v}), \ \forall \bar{v} \in V$

3) $T(\bar{u} - \bar{v}) = T(\bar{u}) - T(\bar{v}), \ \forall \bar{u}, \bar{v} \in V$

Demostración. 1) $\forall \bar{u} \in V, \bar{0} = 0\bar{u}$

$$T(\bar{0}) = T(0\bar{u}) = 0(T(\bar{u})) = \bar{0}$$

puesto que T es T.L

2) $-\bar{v} = (-1)\bar{v}; \ \forall \bar{v} \in V$

$$T(-\bar{v}) = T((-1)\bar{v}) = (-1)T(\bar{v}) = -T(\bar{v})$$

puesto que T es TL.

3) $\bar{u} - \bar{v} = \bar{u} + (-\bar{v}) \ \forall \bar{u}, \bar{v} \in V$

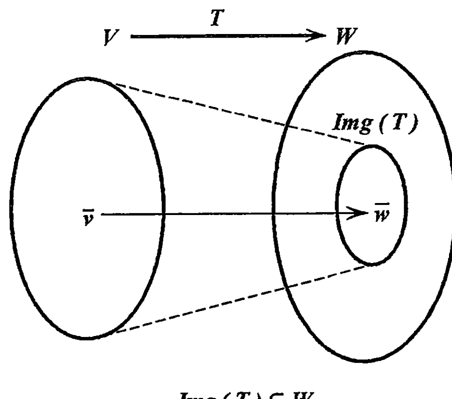
$$T(\bar{u} - \bar{v}) = T(\bar{u} + (-\bar{v})) = T(\bar{u}) + T(-\bar{v}) = T(\bar{u}) - T(\bar{v})$$

◇

Definición 7.7

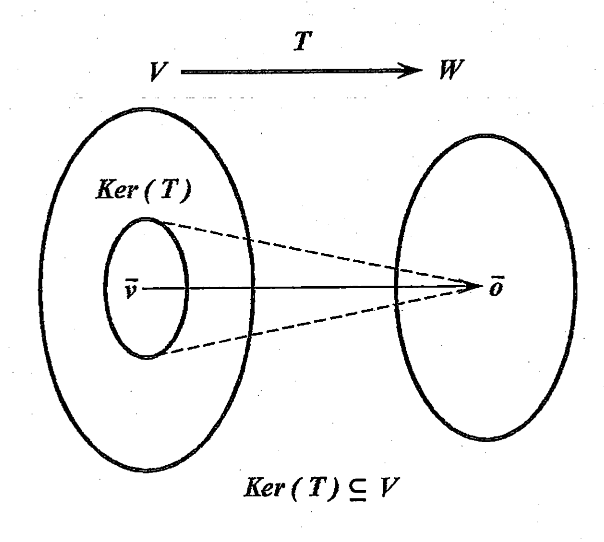
Sea $T : V \longrightarrow W$ una T.L. la **imagen** de T que se denota por $Img(T)$, es el conjunto de todos los vectores $\bar{w}$ en W que son imagen bajo T de al menos un vector $\bar{v}$ en V.

Es decir: $Img(T) = \{\bar{w} \in W / T(\bar{v}) = \bar{w}; \ \forall \bar{v} \in V\}$



Definición 7.8

Sea $T : V \longrightarrow W$ una T.L. El **núcleo** de T que se denota por $Ker(T)$, es el conjunto de los vectores $\bar{v}$ en V que tienen como imagen según T, al vector $\bar{0}$. Es decir: $Ker(T) = \{\bar{v} \in V / T(\bar{v}) = \bar{0}\}$



En la transformación identidad (Ejemplo 7.9): $Img(T) = \mathbb{R}^n$, $Ker(T) = \{\bar{0}\}$

En la transformación cero (Ejemplo 7.10): $Img(T) = \{\bar{0}\}$, $Ker(T) = \mathbb{R}^n$

En los ejemplos

$$
\begin{aligned}
7.5 &: Ker(T) = \{0\},\ Img(T) = \mathbb{R}^2 \\
7.6 &: Ker(T) = \{\bar{0}\},\ Img(T) = \mathbb{R}^n \\
7.7 &: Ker(T) = \{\bar{0}\},\ Img(T) = \{z = 0\} = \mathscr{P}_{XY} \subset \mathbb{R}^3 \\
7.8 &: Ker(T) = \{\bar{0}\},\ Img(T) = \mathbb{R}^3 \\
7.11 &: Ker(T) = \{\bar{0}\},\ Img(T) \subset \mathbb{P}_2 \\
7.12 &: Ker(T) = \{\bar{0}\},\ Img(T) = \mathbb{C}
\end{aligned}
$$

Nota

El núcleo y la imagen de una TM requiere de un trato más detallado.

1) Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una TM definida por $T(\bar{x}) = A\bar{x}$ donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

es una matriz de orden $m \times n$

$Ker(T) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n / T(\bar{x}) = \bar{0}\}$

$$T(\bar{x}) = A\bar{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{m\times 1} \in \mathbb{R}^n$$

el problema se reduce a resolver el S.H.E.L. Es decir el núcleo de T consta de todos los vectores

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

que son solución del sistema homogéneo $A\bar{x} = \bar{0}$

2) $Img(T) = \{\bar{b} \in \mathbb{R}^m / T(\bar{x}) = \bar{b};\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n\}$

$T(\bar{x}) = A\bar{x} = \bar{b}$. Entonces la Imagen de T consta de todos los vectores

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

tales que el sistema $A\bar{x} = \bar{b}$ es consistente

Ejemplo 7.19

Sea la transformación matricial (TM) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(\bar{x}) = A\bar{x}$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Encontrar el núcleo de T

2) Encontrar la imagen de T

1) $Ker(T) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 / T(\bar{x}) = \bar{0}\}$

$$T(\bar{x}) = A\bar{x} = \bar{0} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

es un sistema homogéneo de ecuaciones lineales donde la matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{OEF}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} = E$$

$r(A) = 2 < n \Longrightarrow \exists n - 2 = 1$ incógnita arbitraria

$$x_3 = t,\ x_2 = 4x_3 = 4t,\ x_1 = -2x_2 + 2x_3 = -8t + 2t = -6t \Longrightarrow \bar{x} = t \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2) $Img(T) = \{\bar{b} \in \mathbb{R}^2 / T(\bar{x}) = \bar{b}; \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^3\}$

$$T(\bar{x}) = A\bar{x} = \bar{b} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ es consistente}$$

es decir si

$$\left. \begin{array}{r} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = b_1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = b_2 \end{array} \right\} \text{ es consistente}$$

entonces

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

este resultado quiere decir que $\bar{b}$ debe ser combinación lineal de vectores L.I. generados por

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{OEC}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

luego

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base para el espacio imagen de T

$$Img(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Nota

En la Sección 7.4 se justifica y demuestra este procedimiento para encontrar una base que genere el espacio imagen de una transformación matricial (TM)

Teorema 7.2

Si $T : V \to W$ es una T.L. Entonces $Ker(T)$ es un subespacio de V

Demostración. Para demostrar que el $Ker(T)$ es un subespacio de V es necesario demostrar que es cerrado bajo la adición y multiplicación por escalares. Es decir: Si $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2 \in Ker(T)$ d.q.

$$\begin{cases} \bar{v}_1 + \bar{v}_2 \in Ker(T) \\ r\bar{v}_1 \in Ker(T); \forall r \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1) Si $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2 \in Ker(T)$ entonces $T(\bar{v}_1) = \bar{0}$ y $T(\bar{v}_2) = \bar{0}$

$$\begin{aligned} T(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) &= T(\bar{v}_1) + T(\bar{v}_2) \text{ puesto que } T \text{ es T.L.} \\ &= \bar{0} + \bar{0} = \bar{0} \end{aligned}$$

Luego $\bar{v}_1 + \bar{v}_2 \in Ker(T)$

2)

$$\begin{aligned} T(r\bar{v}_1) &= rT(\bar{v}_1) \text{ puesto que } T \text{ es T.L.} \\ &= r\bar{0} = \bar{0}; \forall r \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Luego $r\bar{v}_1 \in Ker(T)$



Teorema 7.3

Si $T : V \to W$ es una T.L. Entonces $Img(T)$ es un subespacio de W.

Demostración. Para demostrar que la $Img(T)$ es un subespacio de W es necesario demostrar que es cerrada bajo la adición y multiplicación por escalares. Es decir:
Si $\bar{w}_1$ y $\bar{w}_2 \in Img(T)$ d.q

$$\begin{cases} \bar{w}_1 + \bar{w}_2 \in Img(T) \\ r\bar{w}_1 \in Img(T); \forall r \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Luego es necesario encontrar vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ en V tales que $T(\bar{a}) = \bar{w}_1 + \bar{w}_2$ y $T(\bar{b}) = r\bar{w}_1$

1) Si $\bar{w}_1$ y $\bar{w}_2 \in Img(T)$ entonces existen vectores $\bar{a}_1$ y $\bar{a}_2$ en V tales que $T(\bar{a}_1) = \bar{w}_1$ y $T(\bar{a}_2) = \bar{w}_2$

Sea $\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2$ entonces

$$\begin{aligned} T(\bar{a}) &= T(\bar{a}_1 + \bar{a}_2) \\ &= T(\bar{a}_1) + T(\bar{a}_2), \quad (T \text{ es } TL) \end{aligned}$$

$$= \bar{w}_1 + \bar{w}_2$$

Luego $\bar{w}_1 + \bar{w}_2 \in Img(T)$

2) Sea $\bar{b} = r\bar{a}_1$ entonces

$$T(\bar{b}) = T(r\bar{a}_1) = rT(\bar{a}_1), \quad (T \text{ es } TL)$$
$$= r\bar{w}_1$$

Luego $r\bar{w}_1 \in Img(T); \forall r \in \mathbb{R}$

◇

Definición 7.9

Si $T : V \to W$ es una T.L. entonces la dimensión del espacio núcleo de T, denotado por $N(T)$, se denomina **nulidad de** T. Es decir:

$$N(T) = \dim Ker(T)$$

Definición 7.10

Si $T : V \to W$ es una T.L. entonces la dimensión del espacio imagen de T, denotado por $R(T)$, se denomina **rango de** T. Es decir:

$$R(T) = \dim Img(T)$$

Ejemplo 7.20

La transformación identidad $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $T(\bar{u}) = \bar{u}$ es una T.L.

$$N(T) = \dim Ker(T) = \dim\{\bar{0}\} = 0$$
$$R(T) = \dim Img(T) = \dim \mathbb{R}^n = n$$

Ejemplo 7.21

La transformación nula $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $T(\bar{u}) = \bar{0}$ es una T.L.

$$N(T) = \dim Ker(T) = \dim \mathbb{R}^n = n$$

$$R(T) = \dim Img(T) = \dim\{\bar{0}\} = 0$$

Nota

El siguiente teorema establece una relación entre la imagen y el núclo de una T.L. de un espacio vectorial de dimensión finita.

Teorema 7.4: de la dimensión

Si $T : V \to W$ es una T.L. de un espacio vectorial de dimensión finita V en un espacio vectorial W, entonces

$$\dim V = \dim Ker(T) + \dim Img(T) = N(T) + R(T)$$

En el Ejemplo 7.20 $\dim V = 0 + n = n$

En el Ejemplo 7.21 $\dim V = n + 0 = n$

El siguiente teorema es una extensión de la definición de una T.L.

Teorema 7.5

Si $T : V \to W$ es una T.L. y si $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ son vectores de V entonces dados los escalares $r_1, r_2, \ldots, r_n$

$$T(r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots + r_n\bar{v}_n) = r_1T(\bar{v}_1) + r_2T(\bar{v}_2) + \cdots + r_nT(\bar{v}_n)$$

Demostración. Sean $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ vectores arbitrarios de V y sea

$$\begin{aligned}
\bar{u} &= r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots + r_n\bar{v}_n \\
T(\bar{u}) &= T(r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots + r_n\bar{v}_n) \\
&= T(r_1\bar{v}_1) + T(r_2\bar{v}_2 + \cdots + r_n\bar{v}_n) \\
&= T(r_1\bar{v}_1) + T(r_2\bar{v}_2) + T(r_3\bar{v}_3 + \cdots + r_n\bar{v}_n) \text{ y así sucesivamente} \\
&= T(r_1\bar{v}_1) + T(r_2\bar{v}_2) + \cdots + T(r_n\bar{v}_n) \\
&= r_1T(\bar{v}_1) + r_2T(\bar{v}_2) + \cdots + r_nT(\bar{v}_n)
\end{aligned}$$

En seguida demostraremos que si dos transformaciones lineales "coinciden" en

los vectores de una base para un espacio vectorial V de dimensión finita, entonces las transformaciones deben "coincidir" en todos los vectores de V. ◇

Teorema 7.6

Sea $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ una base de un espacio vectorial V de dimensión finita y sean $T : V \to W$ y $F : V \to W$ dos TL.
Si $T(\bar{v}_1) = F(\bar{v}_1), T(\bar{v}_2) = F(\bar{v}_2), \ldots, T(\bar{v}_n) = F(\bar{v}_n)$ entonces $T(\bar{v}) = F(\bar{v}); \forall\ \bar{v} \in V$.

Demostración. Si $\bar{v} \in V$ entonces

$$\begin{aligned}
\bar{v} &= r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots + r_n\bar{v}_n \\
T(\bar{v}) &= T(r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots + r_n\bar{v}_n) \\
&= r_1T(\bar{v}_1) + r_2T(\bar{v}_2) + \cdots + r_nT(\bar{v}_n) \\
&= r_1F(\bar{v}_1) + r_2F(\bar{v}_2) + \cdots + r_nF(\bar{v}_n) \\
&= F(r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots + r_n\bar{v}_n) \\
&= F(\bar{v})
\end{aligned}$$

Por tanto $T(\bar{v}) = F(\bar{v}); \forall\ \bar{v} \in V$. ◇

Ahora veremos, que si $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ es una base de un espacio vectorial V y si $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_n$ son vectores arbitrarios de un espacio vectorial W (no necesariamente diferentes), entonces es posible obtener una T.L. $T : V \to W$ tal que $T(\bar{v}_1) = \bar{w}_1, T(\bar{v}_2) = \bar{w}_2, \ldots, T(\bar{v}_n) = \bar{w}_n$. Es decir que una TL. está determinada por las imágenes de una base, lo que queda establecido en el siguiente teorema.

Teorema 7.7

Si $T : V \to W$ es una T.L., $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ es una base para V y si $T(\bar{v}_i) = \bar{w}_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ entonces $\forall\ \bar{v} \in V$, $T(\bar{v})$ está determinada y $T(\bar{v}) = r_1\bar{w}_1 + r_2\bar{w}_2 + \cdots + r_n\bar{w}_n$ donde $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son escalares tales que $\bar{v} = r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots + r_n\bar{v}_n$.

Demostración. Sea $\bar{v} \in V$. Como B es una base para V, existen escalares $r_1, r_2, \ldots, r_n$ tales que

$$\bar{v} = r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots + r_n\bar{v}_n \tag{7.1}$$

$$T(\bar{v}) = T(r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots + r_n\bar{v}_n)$$

$$T(\bar{v}) = r_1\bar{w}_1 + r_2\bar{w}_2 + \cdots r_n\bar{w}_n \tag{7.2}$$

◇

Nota

1) $T(\bar{v})$ está determinada en forma única puesto que los escalares $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son únicos.

2) Para comprobar que T mapea $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ en las imágenes predeterminadas $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_n$, hacemos lo siguiente:

   en (7.1): $\bar{v} = \bar{v}_1$ entonces $r_1 = 1, r_2 = 0, \ldots, r_n = 0$

   en (7.2): $T(\bar{v}) = T(\bar{v}_1) = \bar{w}_1$

   De igual manera $T(\bar{v}_2) = \bar{w}_2, \ldots, T(\bar{v}_n) = \bar{w}_n$.

3) Se demuestra que T es una T.L.

   $T : V \to W$ definida por $T(\bar{v}) = r_1\bar{w}_1 + r_2\bar{w}_2 + \cdots + r_n\bar{w}_n$

   (a) Sean $\bar{u}, \bar{v}$ vectores en V.

   Si $\bar{u} \in V \Rightarrow \bar{u} = s_1\bar{v}_1 + s_2\bar{v}_2 + \cdots + s_n\bar{v}_n$

   Si $\bar{v} \in V \Rightarrow \bar{v} = r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots + r_n\bar{v}_n$

$$\begin{aligned}
\bar{u} + \bar{v} &= (s_1 + r_1)\bar{v}_1 + (s_2 + r_2)\bar{v}_2 + \cdots + (s_n + r_n)\bar{v}_n \\
T(\bar{u} + \bar{v}) &= T((s_1 + r_1)\bar{v}_1 + (s_2 + r_2)\bar{v}_2 + \cdots + (s_n + r_n)\bar{v}_n) \\
&= (s_1 + r_1)\bar{w}_1 + (s_2 + r_2)\bar{w}_2 + \cdots + (s_n + r_n)\bar{w}_n \\
&= (s_1\bar{w}_1 + s_2\bar{w}_2 + \cdots + s_n\bar{w}_n) + (r_1\bar{w}_1 + r_2\bar{w}_2 \\
&\quad + \cdots + r_n\bar{w}_n) \\
&= T(\bar{u}) + T(\bar{v})
\end{aligned}$$

(b) Si $k \in \mathbb{R}$ y $\bar{v} \in V$ entonces $k\bar{v} \in V$

$$\begin{aligned} T(k\bar{v}) &= T(k(r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots + r_n\bar{v}_n)) \\ &= T((kr_1)\bar{v}_1 + (kr_2)\bar{v}_2 + \cdots + (kr_n)\bar{v}_n) \\ &= k(r_1\bar{w}_1 + r_2\bar{w}_2 + \cdots + r_n\bar{w}_n) \\ &= kT(\bar{v}) \end{aligned}$$

Por tanto cumple las dos condiciones de una T.L.

Ejemplo 7.22

Sea $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ donde $\bar{v}_1 = (1,2,-3), \bar{v}_2 = (0,1,-1), \bar{v}_3 = (2,0,-1)$ y sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una T.L. Si $T(\bar{v}_1) = (3,-2), T(\bar{v}_2) = (4,1), T(\bar{v}_3) = (3,-2)$ encontrar $T(x,y,z)$ y $T(-3,5,0)$
Sea $\bar{v} = (x,y,z) \in V$ entonces

$$\bar{v} = r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + r_3\bar{v}_3 \tag{7.3}$$

$$(x,y,z) = r_1(1,2,-3) + r_2(0,1,-1) + r_3(2,0,-1)$$

$$\left.\begin{aligned} r_1 \quad\; + 2r_3 &= x \\ 2r_1 + r_2 \quad\; &= y \\ -3r_1 - r_2 - r_3 &= z \end{aligned}\right\} \; r_1 = -x-2y-2z,\; r_2 = 2x+5y+4z,\; r_3 = x+y+z$$

En (7.3):

$$\begin{aligned} \bar{v} &= (-x-2y-2z)\bar{v}_1 + (2x+5y+4z)\bar{v}_2 + (x+y+z)\bar{v}_3 \\ T(\bar{v}) &= (-x-2y-2z)T(\bar{v}_1) + (2x+5y+4z)T(\bar{v}_2) \\ &\quad + (x+y+z)T(\bar{v}_3) \\ T(x,y,z) &= (-x-2y-2z)(3,-2) + (2x+5y+4z)(4,1) \\ &\quad + (x+y+z)(3,-2) \\ T(x,y,z) &= (8x+17y+13z, 2x+7y+6z) \end{aligned}$$

$$T(-3,5,0) = (8(-3)+17(5), 2(-3)+7(5)) = (61,29)$$

Por lo tanto, basta conocer las imágenes de los vectores de una base, para conocer la imagen de cualquier vector.

Ejemplo 7.23

Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ una T.L. y sea $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ una base de $\mathbb{P}_2$ donde $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = 1 + x$, $p_3(x) = 1 + x + x^2$. Si $T(p_1) = 2 - x^2$, $T(p_2) = 3x + x^2$, $T(p_3) = 1 - x$. Calcular

1) $T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)$

2) $T(1 + 2x - 3x^2)$

1)

$$\begin{aligned} p(x) &= r_1 p_1(x) + r_2 p_2(x) + r_3 p_3(x) \\ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 &= r_1(1) + r_2(1 + x) + r_3(1 + x + x^2) \\ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 &= (r_1 + r_2 + r_3) + (r_2 + r_3)x + r_3 x^2 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} r_1 + r_2 + r_3 &= a_0 \\ r_2 + r_3 &= a_1 \\ r_3 &= a_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow r_1 = a_0 - a_1,\ r_2 = a_1 - a_2,\ r_3 = a_2$$

$$\begin{aligned} p(x) &= (a_0 - a_1)p_1(x) + (a_1 - a_2)p_2(x) + a_2 p_3(x) \\ T(p(x)) &= (a_0 - a_1)(2 - x^2) + (a_1 - a_2)(3x + x^2) \\ &\quad + a_2(1 - x) \\ T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) &= (2a_0 - 2a_1 + a_2) + (3a_1 - 4a_2)x \\ &\quad + (-a_0 + 2a_1 - a_2)x^2 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} T(1 + 2x - 3x^2) &= (2 - 4 - 3) + (6 + 12)x + (-1 + 4 + 3)x^2 \\ &= -5 + 18x + 6x^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 7.24

Sea $T : \mathbb{M}_{22} \to \mathbb{M}_{23}$ una T.L. $B = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ es la base estándar de $\mathbb{M}_{22}$,

$$T(M_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T(M_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(M_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad T(M_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calcular $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

2) $T\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

1)

$$M = r_1 M_1 + r_2 M_2 + r_3 M_3 + r_4 M_4$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = r_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + r_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + r_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$r_1 = a,\ r_2 = b,\ r_3 = c,\ r_4 = d$

$$M = aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4$$

$$T(M) = aT(M_1) + bT(M_2) + cT(M_3) + dT(M_4)$$

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2c + d & -a + b & -c \\ 2a + b + c & a - b + c & a + b + 3c + d \end{pmatrix}$$

2)

$$T\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 7.25

Sea $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una T.L., $B = \{z_1, z_2\}$ es una base de $\mathbb{C}$ donde $z_1 = 1 - 3i$ y $z_2 = -1 + 4i$. Si $T(z_1) = 4i$, $T(z_2) = 1 + i$

1) Calcular $T(z) = T(a + bi)$

2) $T(-5 + 8i)$

1)

$$\begin{aligned} z &= r_1 z_1 + r_2 z_2 \\ a + bi &= r_1(1 - 3i) + r_2(-1 + 4i) \\ a + bi &= (r_1 - r_2) + (-3r_1 + 4r_2)i \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} r_1 - r_2 &= a \\ -3r_1 + 4r_2 &= b \end{aligned}\right\} \Rightarrow r_1 = b + 4a,\ r_2 = b + 3a$$

$$\begin{aligned} z &= (b + 4a)z_1 + (b + 3a)z_2 \\ T(z) &= (b + 4a)(4i) + (b + 3a)(1 + i) \\ T(a + bi) &= (3a + b) + (19a + 5b)i \end{aligned}$$

2) $T(-5 + 3i) = (-15 + 3) + (-95 + 15)i = -12 - 80i$

7.3 Ejercicios propuestos

1) $\mathbb{M}_2 = \{$espacio de las matrices cuadradas de orden 2 con elementos reales$\}$

$\mathbb{C} = \{$espacio de los números complejos$\}$

Sea $T : \mathbb{M}_2 \to \mathbb{C}$ una T.L. $B = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ es una base para $\mathbb{M}_{22}$ donde:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(M_1) = 2 - 4i, \quad T(M_2) = 5, \quad T(M_3) = -4i, \quad T(M_4) = 7 + 9i$$

Calcular

(a) $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

(b) $T(A^{-1})$ si $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Rpta:

(a) $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (4a + 8b - c - d) + i(-4a + 9d)$

(b) $T(A^{-1}) = T\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = -24 + 31i$

2) $\mathbb{P}_n =$ {espacio de los polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes reales}

$\mathbb{C} =$ {espacio de los números complejos}

Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{C}$ una T.L. Si $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ es una base de $\mathbb{P}_2$ donde $p_1(x) = 1 - x^2,\ p_2(x) = 2 + x,\ p_3(x) = -1 + x + 2x^2$ y

$$T(p_1) = 1 + 3i, \qquad T(p_2) = 4 - 5i, \qquad T(p_3) = i$$

(a) Calcular $T(c + bx + ax^2)$

(b) Usando el resultado anterior, calcular $T(3 - 3x^2)$

3) $\mathbb{P}_n =$ {espacio de los polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes reales}

Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$ una T.L. y sea $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ una base de $\mathbb{P}_2$ donde $p_1(x) = 2,\ p_2(x) = 2 - 3x,\ p_3(x) = 2 - 3x + 8x^2$

Si $T(p_1) = 1 - x^2 + x^3$, $T(p_2) = 3 - 2x^2$, $T(p_3) = 2 + x - 3x^3$ Hallar $T(2 - 2x + 3x^2)$

Rpta:

$$\begin{aligned} T(a+bx+cx^2) &= \frac{1}{24}(12a-16b-3c)+(\frac{3}{24}c)x \\ &+\frac{1}{24}(-12a+8b+6c)x^2 \\ &+\frac{1}{24}(12a+8b-9c)x^3 \\ T(2-2x+3x^2) &= \frac{1}{24}(47+9x-22x^2-19x^3) \end{aligned}$$

4) $\mathbb{P}_2 =$ {espacio de los polinomios de grado ≤ 2 con coeficientes reales}

$\mathbb{C} =$ {espacio de los números complejos}

Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{C}$ una T.L. y $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ es una base para $\mathbb{P}_2$ donde $p_1(x) = x^2+4x+1,\ p_2(x) = -x^2+x+1,\ p_3(x) = x$, si $T(p_1) = 2,\ T(p_2) = 4+2i,\ T(p_3) = 6-2i$

(a) Calcular $T(p(x))$ si $p(x) = ax^2+bx+c \in \mathbb{P}_2$

(b) Calcular $T(5x^2-7)$

5) $\mathbb{P}_n =$ {espacio de los polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes reales}

Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_1$ una TL. y $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ una base para $\mathbb{P}_2$ donde $p_1(x) = 1+2x+x^2,\ p_2(x) = 1+9x,\ p_3(x) = 3+3x+4x^2$ y $T(p_1) = -p_1'(x),\ T(p_2) = xp_2'(x),\ T(p_3) = p_3'(x)$

(a) Hallar $T(p(x))$ donde $p(x) = a+bx+cx^2$

(b) Calcular $T(7-3x+5x^2)$

Rpta:

(a) $T(a+bc+cx^2) = (99a-22b-57c)+(45a-9b-29c)x$

(b) $T(7-3x+5x^2) = 474+197x$

7.4 Núcleo e imagen de un transformación matricial (TM)

En esta sección encontraremos las bases que generan el espacio núcleo y el espacio imagen de una TM; y la relación entre la nulidad y el rango de una T.M.

Definición 7.11

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

una matriz de orden $m \times n$.

Los vectores columna de A que se forman con las columnas de A son:

$$\bar{c}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \bar{c}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots \quad \bar{c}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Al subespacio de $\mathbb{R}^m$ generado por los vectores columna se le denomina **espacio de las columnas de** A.

Ejemplo 7.26

Los vectores columna de

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son

$$\bar{c}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \bar{c}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{c}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Teorema 7.8

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por $T(\bar{u}) = A\bar{u}$ donde A es una matriz de orden $m \times n$. Entonces la imagen de T es el espacio de las columnas de A.

Demostración. Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $T(\bar{u}) = A\bar{u}$ donde $A_{m\times n}$

$$\text{Un vector } \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in Img(T) \Leftrightarrow T(\bar{x}) = \bar{b} \text{ para algún } x \in \mathbb{R}^n$$

$T(\bar{x}) = A\bar{x} = \bar{b} \Leftrightarrow$ el sistema de ecuaciones $A\bar{x} = \bar{b}$ es consistente.
Es decir:

$$A\bar{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{7.4}$$

es consistente.
Multiplicando las matrices se obtiene:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Puesto que las matrices del lado izquierdo forman las columnas de A, se concluye que (7.4) es consistente si y solo si $\bar{b}$ es una combinación lineal de los vectores columna de A. Por lo tanto, el espacio de las columnas de A es el espacio imagen de T. ◇

Ejemplo 7.27

Sea la TM, $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(\bar{u}) = A\bar{u}$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Encontrar:

1) Una base para el espacio imagen de T.

2) Una base para el espacio núcleo de T.

3) El rango y la nulidad de T.

1) El espacio $Img(T)$ está generado por el espacio de las columnas de A.

Se sabe que el "espacio de la columnas de A" es el "espacio de las filas de A^T" entonces:

Aplicamos operaciones elementales fila a la matriz A^T:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -1 & 6 & 4 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{OEF}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E^T \Rightarrow E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La imagen de T está generado por los vectores columna diferentes de cero de E.

$$Img(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2) $Ker(T) = \{\bar{u} \in \mathbb{R}^3 / T(\bar{u}) = \bar{0}\}$

$$T(\bar{u}) = A\bar{u} = \bar{0}$$

$$A\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{0} \text{ es un SHEL}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{OEF}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -19/11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_A$$

$r(A) = 2 < n \Rightarrow \exists n - 2 = 1$ incógnita arbitraria.

$$z = t, \quad y = \frac{19}{11}z = \frac{19}{11}t, \quad x = y - 3z = \frac{19}{11}t - 3t = -\frac{14}{11}t$$

$$\bar{u} = t\begin{pmatrix} -14/11 \\ 19/11 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{u} = t\begin{pmatrix} -14 \\ 19 \\ 11 \end{pmatrix}; \quad t \in \mathbb{R}$$

$$Ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} -14 \\ 19 \\ 11 \end{pmatrix} \right\}$$

3) $R(T) = \dim Img(T) = 2$

$N(T) = \dim Ker(T) = 1$

Por el Teorema de la dimensión:

$$R(T) + N(T) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

7.5 Ejercicios propuestos

1) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(\bar{u}) = A\bar{u}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Cuáles de los siguientes vectores pertenecen al espacio $Img(T)$

a) $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$

Rpta: a) y c)

Cuáles de los siguientes vectores pertenecen al espacio $Ker(T)$

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Rpta: b)

2) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $T(\bar{u}) = A\bar{u}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Cuáles de los siguientes vectores pertenecen al espacio $Img(T)$.

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$

Cuáles de los siguientes vectores pertenecen al espacio $Ker(T)$

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

3) Sea $T : \mathbb{M}_{22} \to \mathbb{C}$ una TL, tal que

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (4a + 8b - c - d) + i(-4a + 9d)$$

(a) Encontrar una base para el espacio imagen de T.

(b) Encontrar una base para el espacio núcleo de T.

(c) Indicar $R(T)$ y $N(T)$.

Rpta:

(a) $Img(T) = \{1 - i, i\}$

(b) $Ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

(c) $R(T) = 2$

$N(T) = 2$

4) Sea $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{C}$ una TL. tal que

$$T(c + bx + ax^2) = (2c + a) + (-12c + 19b - 15a)i$$

(a) Encontrar una base para el espacio imagen de T.

(b) Encontrar una base para el espacio núcleo de T.

(c) Indicar $R(T)$ y $N(T)$.

5) Sea $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_1$ una TL definida por

$$T(a + bx + cx^2) = (99a - 22b - 57c) + (45a - 9b - 29c)x$$

(a) Encontrar una base para el espacio imagen de T

(b) Encontrar una base para el espacio núcleo de T

(c) Indicar $R(T)$ y $N(T)$

Rpta:

(a) $\text{Img}(T) = \{1 + 2x, x\}$

(b) $\text{Ker}(T) = \{p(x) = 1 - 24x + 9x^2\}$

(c) $R(T) = 2, N(T) = 1$

6) Sea $T : \mathbb{M}_{22} \rightarrow \mathbb{M}_{23}$ una T.L. definida por:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2c + d & -a + b & -c \\ 2a + b + c & a - b + c & a + b + 3c + d \end{pmatrix}$$

(a) Encontrar una base para el espacio imagen de T.

(b) Encontrar una base para el espacio núcleo de T.

(c) Indicar $R(T)$ y $N(T)$.

7.6 Representación matricial de una transformación lineal (TL)

Hemos demostrado que la transformación matricial (TM) $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $T(\bar{u}) = A\bar{u}$ donde A es una matriz fija de orden $m \times n$ es una T.L. Es decir toda matriz A de orden $m \times n$ da origen a una TL de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.

Ahora vamos a ocuparnos del caso inverso: "Toda TL entre espacios vectoriales de dimensión finita se puede representar mediante una matriz. Es decir: Toda TL es una TM.

Este resultado, nos permitirá aplicar nuestros conocimientos de las TM al estudio de las TL en general.

En primer término, vamos a demostrar que toda TL $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una T.M.

Teorema 7.9

Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una T.L. entonces es posible encontrar una matriz A de orden $m \times n$ tal que $T(\bar{u}) = A\bar{u}; \forall \bar{u} \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Consideremos la base estándar $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ y la matriz

$$A = \big(T(e_1), T(e_2), \ldots, T(e_n)\big)$$

cuyos vectores columna son las imágenes de los elementos de la base bajo T. Es decir:
Si

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad T(e_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, T(e_n) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

entonces

$$A = \Big(T(e_1)\ T(e_2)\ \cdots\ T(e_n)\Big) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{7.5}$$

Si $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = u_1e_1 + u_2e_2 + \cdots + u_ne_n$$

$$T(\bar{u}) = u_1T(e_1) + u_2T(e_2) + \cdots + u_nT(e_n) \tag{7.6}$$

Por otro lado:

$$A\bar{u} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \cdots + a_{1n}u_n \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{2n}u_n \\ \vdots \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \cdots + a_{mn}u_n \end{pmatrix}$$

$$= u_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + u_n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

$$= u_1T(e_1) + u_2T(e_2) + \cdots + u_nT(e_n) \tag{7.7}$$

Comparando (7.6) y (7.7) resulta que $T(\bar{u}) = A\bar{u}$ es decir T es una TM. ◇

Definición 7.12

A la matriz $A = \begin{pmatrix} T(e_1) & T(e_2) & \cdots & T(e_n) \end{pmatrix}$ de orden $m \times n$ se le llama **matriz de T con respecto a la base estándar** (o **matriz estándar** para T)

Ejemplo 7.28

Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una TL definida por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 3z \\ y + z + w \\ x - 2y - w \end{pmatrix}$$

1) Encontrar la matriz de T con respecto a la base estándar de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente.

2) Utilizando la matriz obtenida en a). Calcular $T(-1, 4, 0, 2)$

1) Sea $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base estándar para $\mathbb{R}^4$

$$T(e_1) = T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad T(e_2) = T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$T(e_3) = T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix} \qquad T(e_4) = T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$A = \Big(T(e_1)\ T(e_2)\ T(e_3)\ T(e_4)\Big) = \begin{pmatrix}1 & 0 & -3 & 0\\0 & 1 & 1 & 1\\1 & -2 & 0 & -1\end{pmatrix}_{3\times 4}$$

es la matriz de T con respecto a la base estándar tal que

$$T(\bar{u}) = A\bar{u} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -3 & 0\\0 & 1 & 1 & 1\\1 & -2 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-3z\\y+z+w\\x-2y-w\end{pmatrix}$$

2)

$$T\begin{pmatrix}-1\\0\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -3 & 0\\0 & 1 & 1 & 1\\1 & -2 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\4\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\6\\-11\end{pmatrix}$$

Ejemplo 7.29

Si $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$ es una T.L. definida por

$$T(a+bx+cx^2) = (b-3c) + (a+c)x - (2a-b)x^2$$

1) Encontrar la matriz de T con respecto a la base estándar de $\mathbb{P}_2$ y $\mathbb{P}_3$ respectivamente.

2) Utilizando la matriz obtenida en 1), calcular $T(2 - x + 5x^2)$

1) Sea $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ la base estándar para $\mathbb{P}_2$

$$T(p_1) = T(1) = T(1 + 0x + 0x^2) = x - 2x^2$$
$$T(p_2) = T(x) = T(0 + x + 0x^2) = 1 + x^2$$
$$T(p_3) = T(x^2) = T(0 + 0x + x^2) = -3 + x$$

$$A = \Big(T(p_1)\ T(p_2)\ T(p_3)\Big) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4\times 3}$$

tal que $T(p(x)) = A(p(x))$

2)

$$T(2 - x + 5x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 7 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = -16 + 7x - 5x^2$$

Ejemplo 7.30

Sea la TL $T : \mathbb{M}_{22} \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + 2d \\ b - c \end{pmatrix}$$

1) Encontrar la matriz de T con respecto a la base estándar de $\mathbb{M}_{22}$ y $\mathbb{R}^2$.

2) Utilizando la matriz obtenida en 1), calcular

$$T\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Sea $B = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ la base estándar para $\mathbb{M}_{22}$

$$T(M_1) = T\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\ 0\end{pmatrix} \qquad T(M_2) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$T(M_3) = T\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix} \qquad T(M_4) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}$$

$$A = \Big(T(M_1)\ T(M_2)\ T(M_3)\ T(M_4)\Big) = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

tal que $T(M) = AM$.

2)

$$T\begin{pmatrix}-5 & 6\\ 3 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\ 6\\ 3\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-11\\ 3\end{pmatrix}$$

Ejemplo 7.31

Sea la TL. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ tal que

$$T\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = 2x - (y + 3z)i$$

1) Encontrar la matriz de T con respecto a la base estándar de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{C}$.

2) Utilizando la matriz obtenida en 1) calcular

$$T\begin{pmatrix}-3\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$$

1) Sea $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base estándar para $\mathbb{R}^3$

$$T(e_1) = T\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = 2, \quad T(e_2) = T\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} = -i, \quad T(e_3) = T\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} = -3i$$

$$A = \begin{pmatrix} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

tal que $T(\bar{u}) = A\bar{u}$.

2)

$$T\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix} = -6 - 6i$$

7.7 Ejercicios propuestos

1) $\mathbb{P}_n = \{$espacio de los polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes reales$\}$

Sea $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2$ una T.L. y $B = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ una base de $\mathbb{P}_3$ donde $f_1(x) = x^3,\ f_2(x) = x^2,\ f_3(x) = x,\ f_4(x) = 1$.

Si $T(f_i) = g_i\ (i = 1, 2, 3, 4),\ g_1(x) = 4x,\ g_2(x) = 9x^2,\ g_3(x) = 4,\ g_4(x) = -3x$

(a) Hallar $T(f(x))$ donde $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

(b) Hallar $T(f(x))$ si $f(x) = 7x - 10$.

(c) Hallar la representación matricial de T con respecto a la base estándar de los espacios $\mathbb{P}_3$ y $\mathbb{P}_2$.

(d) Hallar una base para el espacio imagen de T.

(e) Hallar una base para el espacio núcleo de T.

(f) ¿Cuál es la $\dim(Img(T))$ y la $\dim(Ker(T))$?

Rpta:

(a) $T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 9bx^2 + (4a - 3d)x + 4c$

(b) $T(7x - 10) = 30x + 28$

(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $Img(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow Img(T) = \{x^2, x, 1\}$

(e) $Ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow Ker(T) = \{3x^3 + 4\}$

(f) $R(T) = 3,\ N(T) = 1 \Rightarrow R(T) + N(T) = 4 = \dim \mathbb{P}_3$

2) $\mathbb{M}_{22} =$ {espacio de las matrices cuadradas de orden 2 con elementos reales}

Sea $T : \mathbb{M}_{22} \to \mathbb{M}_{22}$ un operador lineal tal que

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Encontrar $T(2A^{-1})$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Escribir la representación matricial de T con respecto a la base estándar de $\mathbb{M}_{22}$.

(c) Encontrar una base para el espacio imagen de T.

(d) Encontrar una base para el espacio núcleo de T.

(e) Indicar el rango de T y la nulidad de T.

3) $\mathbb{C} = \{$espacio de los números complejos$\}$

y sea $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una TL tal que $T(1) = 3 + 2i, T(i) = 1 + 4i$

(a) Encontrar $T(z)$ donde $z = a + bi$.

(b) Encontrar la imagen, según T, de las raíces de la ecuación $x^3 - 5x^2 + 9x - 9 = 0$.

(c) Encontrar la matriz de T con respecto a la base estándar de $\mathbb{C}$.

(d) Encontrar una base para el espacio imagen de T.

(e) Encontrar una base para el espacio núcleo de T.

Rpta:

(a) $T(a + bi) = (3a + b) + i(2a + 4b)$

(b) $r_1 = 3,\ r_2 = 1 + \sqrt{2}i,\ r_3 = 1 - \sqrt{2}i$
$T(r_1) = T(3) = 9 + 6i$
$T(r_2) = T(1 + \sqrt{2}i) = (3 + \sqrt{2}) + i(2 + 4\sqrt{2})$
$T(r_3) = T(1 - \sqrt{2}i) = (3 - \sqrt{2}) + i(2 - 4\sqrt{2})$

(c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(d) $Img(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow Img(T) = \{1+4i, i\} \quad R(T) = 2$

(e) $Ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow Ker(T) = \{0 + 0i\} \quad N(T) = 0$

$R(t) + N(T) = 2 = \dim \mathbb{C}$

4) $\mathbb{P}_n = \{$espacio de los polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes reales$\}$

Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_1$ una T.L. y sea $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ una base para $\mathbb{P}_2$ donde

$$p_1(x) = x^2 + 1, \quad p_2(x) = 2x - 1, \quad p_3(x) = 3$$
$$T(p_1) = 3 + 2x, \quad T(p_2) = 1 - x, \quad T(p_3) = -5x$$

(a) Encontrar $T(p(x))$ donde $p(x) = ax^2 + bx + c$

(b) Calcular $T(x^2 - 2x + 2)$

(c) Encontrar la matriz de T con respecto a la base estándar de $\mathbb{P}_2$ y $\mathbb{P}_1$ respectivamente.

5) $\mathbb{M}_{22} =$ {espacio de las matrices cuadradas de orden 2 con elementos reales}

$\mathbb{C} =$ {espacio de los números complejos}

Sea $T : \mathbb{M}_{22} \to \mathbb{C}$ una TL. y $B = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ una base para $\mathbb{M}_{22}$ donde

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

y $T(M_1) = 3 - 2i,\ T(M_2) = 4i,\ T(M_3) = 1,\ T(M_4) = 5 + i$

(a) Calcular $T(M)$ donde $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

(b) Encontrar la matriz de T con respecto a la base estándar de $\mathbb{M}_{22}$ y $\mathbb{C}$ respectivamente.

(c) Encontrar una base para el espacio imagen de T.

(d) Encontrar una base para el espacio núcleo de T.

Rpta:

(a) $T(M) = T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{10}(-14a + 11b +$
$16c + 6d) + \frac{i}{10}(28a - 7b + 8c - 2d)$

(b) $A = \begin{pmatrix} -14 & 11 & 16 & 6 \\ 28 & -7 & 8 & -2 \end{pmatrix}$

(c) $Img(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$Img(T) = \{1 - 2i, i\}$

(d) $Ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} -20 \\ -56 \\ 21 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -137 \\ -98 \\ 0 \\ 105 \end{pmatrix} \right\}$

$Ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} -20 & 56 \\ 21 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -137 & -98 \\ 0 & 105 \end{pmatrix} \right\}$

6) $\mathbb{P}_n =$ {espacio de los polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes reales}

Sea $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2$ una T.L. $B = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ es una base de $\mathbb{P}_3$ donde

$$p_1(x) = 1,\ p_2(x) = x,\ p_3(x) = x^2 + x,\ p_4(x) = x^3 + x^2 + 1$$

(a) Si $T(p_1) = p_1',\ T(p_2) = p_2',\ T(p_3) = p_3',\ T(p_4) = p_4'$
Calcular $T(p(x))$; donde $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$

(b) Encontrar la matriz de T, con respecto a la base estándar de $\mathbb{P}_3$ y $\mathbb{P}_2$ respectivamente.

(c) Encontrar una base para el espacio núcleo de T.

(d) Encontrar una base para el espacio imagen de T.

7) $\mathbb{P}_n =$ {espacio de los polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes reales}

Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_1$ una T.L. y $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ es una base de $\mathbb{P}_3$ donde $p_1(x) = x^2 + 1,\ p_2(x) = x^2 + 2x + 1,\ p_3(x) = x + 2$ y además

$$T(p_1) = x + 1, \quad T(p_2) = x, \quad T(p_3) = 6$$

(a) Calcular $T(5x^2+2x-1)$.

(b) Encontrar la matriz de T con respecto a la base estándar de $\mathbb{P}_2$ y $\mathbb{P}_1$ respectivamente.

(c) Encontrar una base para el espacio imagen de T.

(d) Encontrar una base para el espacio núcleo de T.

Rpta:

(a) $T(ax^2+bx+c) = ax + \frac{1}{4}(-9a-2b+13c)$

$T(5x^2+2x-1) = 5x + \frac{1}{4}(-45-4-13) = 5x - \frac{31}{2}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 13/4 & -1/2 & -9/4 \end{pmatrix}$

(c) $Img(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow Img(T) = \{4x-9, 1\}$

(d) $Ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow Ker(T) = \{2x^2+13x\}$

8) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ una T.L. y sea $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ una base para $\mathbb{R}^3$ donde $\bar{u}_1 = (1,-1,0)^T, \bar{u}_2 = (1,2,1)^T, \bar{u}_3 = (-2,1,-1)^T$ y

$$T(\bar{u}_1) = 2-5i, \quad T(\bar{u}_2) = 3i, \quad T(\bar{u}_3) = -i+i$$

(a) Hallar $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(b) Encontrar la matriz de T con respecto a la base estándar de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{C}$ respectivamente.

(c) Encontrar una base para el espacio imagen de T.

(d) Encontrar una base para el espacio núcleo de T.

9) $\mathbb{P}_n$ = {espacio de los polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes reales}

Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{P}_2$ una TL donde $\bar{u}_1 = (0,1,2,0)^T, \bar{u}_2 = (1,0,0,3)^T, \bar{u}_3 = (0,-1,-1,0)^T, \bar{u}_4 = (-1,0,0,-2)^T$ además $T(\bar{u}_1) = -2x^2 - 3,\ T(\bar{u}_2) = -2x,\ T(\bar{u}_3) = x,\ T(\bar{u}_4) = x^2 + 1$.

(a) Hallar $T(a,b,c,d)$

(b) Calcular $T(-1,0,4,5)$

(c) Encontrar una base para el espacio imagen de T

(d) Encontrar una base para el espacio núcleo de T

Rpta:

(a) $$T(a,b,c,d) = (-3a + 2b - 2c + d)x^2 + (4a - 2b + c - 2d) + (-3a + 3b - 3c + d)$$

(b) $T(-1,0,4,5) = -10x - 4$

(c) $$Img(T) = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow Img(T) = \{x^2 + 1, x, 1\},\ R(T) = 3$$

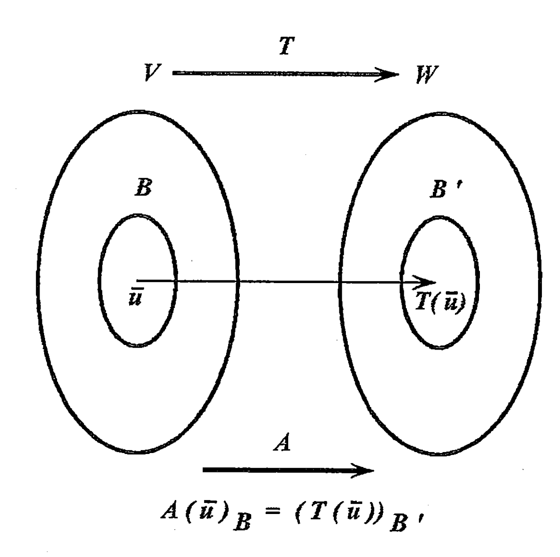
(d) $$Ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix} \right\},\ N(T) = 1$$

7.8 Representación matricial de las TL con respecto a bases diferentes de las bases estándar u ordinarias

Si V y W son espacios vectoriales de dimensión finita (no necesariamente $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$) entonces con un poco de imaginación cualquier TL $T : V \to W$ se puede considerar como una TM. La idea central es la siguiente:

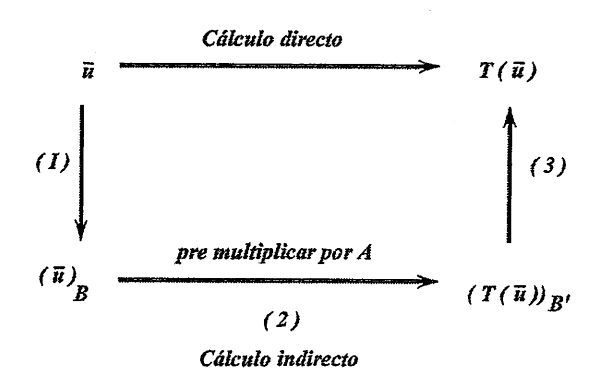
Sean B y B' bases de V y W respectivamente. Suponiendo que de algún modo es posible encontrar una matriz A tal que $A(\bar{u})_B = (T(\bar{u}))_{B'}, \forall \bar{u} \in V$ donde

$(\bar{u})_B$ es el vector de coordenadas de $\bar{u}$ en la base B y $(T(\bar{u}))_{B'}$ es el vector de coordenadas de $T(\bar{u})$ en la base B'



Es decir: La multiplicación por A transforma a la matriz de coordenadas de $\bar{u}$ en la matriz de coordenadas de $T(\bar{u})$.

Entonces $T(\bar{u})$ se puede calcular en tres pasos utilizando el siguiente procedimiento indirecto.



De acuerdo al esquema, el procedimiento indirecto consiste en:

1) Calcular el vector de coordenadas $(\bar{u})_B$

2) Premultiplicar $(\bar{u})_B$ por A para obtener $(T(\bar{u}))_{B'}$

3) Reconstruir $T(\bar{u})$ a partir del vector de coordenadas $(T(\bar{u}))_{B'}$

Ahora se trata de encontrar una matriz A que satisfaga la ecuación

$$A(\bar{u})_B = (T(\bar{u}))_{B'}; \ \forall \bar{u} \in V \qquad (7.8)$$

En efecto:

$\dim V = n$ y $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$ es una base de V

$\dim W = m$ y $B' = \{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_m\}$ es una base de W

Se quiere determinar una matriz A de orden $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

que satisfaga (7.8); $\forall \bar{u} \in V$.

Si $\bar{u} \in V \Rightarrow \bar{u} = r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots + r_n\bar{v}_n$

En particular: si $\bar{u} = \bar{v}_1$ se requiere que $A(\bar{v}_1)_B = (T(\bar{v}_1))_{B'}$ pero

$$(\bar{v}_1)_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

por lo que tenemos:

$$A(\bar{v}_1)_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = (T(\bar{v}_1))_{B'}$$

Entonces la 1ª columna de A es el vector de coordenadas de $T(\bar{v}_1)$ con respecto a la base B', es decir $(T(\bar{v}_1))_{B'}$

Si hacemos $\bar{u} = \bar{v}_2$ se requiere que $A(\bar{v}_2)_B = (T(\bar{v}_2))_{B'}$ pero

$$(\bar{v}_2)_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

por lo que tenemos:

$$A(\bar{v}_2)_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} = (T(\bar{v}_2))_{B'}$$

Entonces la 2ª columna de A es el vector de coordenadas $T(\bar{v}_2)$ con respecto a la base B', es decir $(T(\bar{v}_2))_{B'}$

Continuando de esta manera encontramos que la n-ésima columna de A es el vector de coordenadas de $T(\bar{v}_n)$ con respecto a la base B' es decir $(T(\bar{v}_n))_{B'}$

Definición 7.13

A la matriz única

$$A = \Big((T(\bar{v}_1))_{B'} \ (T(\bar{v}_2))_{B'} \ \cdots \ (T(\bar{v}_n))_{B'} \Big)$$

de orden $m \times n$ que se obtiene siguiendo este procedimiento se denomina la **matriz de T con respecto a las bases** B y B' se denota por $(A)_{BB'}$

Ejemplo 7.32

Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una T.L. definida por

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 3z \\ y + z + w \\ x - 2y - w \end{pmatrix}$$

y sean $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\}$ y $B' = \{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3\}$ bases de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$ respectiva-

mente donde

$$\bar{v}_1 = (1,0,0,0)^T, \quad \bar{v}_2 = (1,1,0,0)^T, \bar{v}_3 = (1,1,1,0)^T, \quad \bar{v}_4 = (1,1,1,1)^T$$
$$\bar{w}_1 = (1,0,0)^T, \quad \bar{w}_2 = (1,1,0)^T, \quad \bar{w}_3 = (1,1,1)^T$$

1) Encontrar la matriz de T con respecto a las bases B y B'

2) Utilizando la matriz obtenida en 1). Calcular $T(-1,4,0,2)^T$

1)
$$(A)_{BB'} = \Big((T(\bar{v}_1))_{B'} \ (T(\bar{v}_2))_{B'} \ (T(\bar{v}_3))_{B'} \ (T(\bar{v}_4))_{B'}\Big)$$

$$T(\bar{v}_1) = T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad T(\bar{v}_2) = T\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$T(\bar{v}_3) = T\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix} \qquad T(\bar{v}_4) = T\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\3\\-2\end{pmatrix}$$

$$(T(\bar{v}_1))_{B'} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_{B'} = a_1\bar{w}_1 + a_2\bar{w}_2 + a_3\bar{w}_3 \Rightarrow (T(\bar{v}_1))_{B'} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_{B'} = a_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 1\\ a_2 + a_3 &= 0\\ a_3 &= 1\end{aligned}\right\} a_1 = 1,\ a_2 = -1,\ a_3 = 1 \Rightarrow (T(\bar{v}_1))_{B'} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Siguiendo con este procedimiento

$$(T(\bar{v}_2))_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{B'} = b_1\bar{w}_1 + b_2\bar{w}_2 + b_3\bar{w}_3$$

entonces

$$(T(\bar{v}_2))_{B'} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(T(\bar{v}_3))_{B'} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{B'} = c_1\bar{w}_1 + c_2\bar{w}_2 + c_3\bar{w}_3$$

entonces

$$(T(\bar{v}_3))_{B'} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(T(\bar{v}_4))_{B'} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}_{B'} = d_1\bar{w}_1 + d_2\bar{w}_2 + d_3\bar{w}_3$$

entonces

$$(T(\bar{v}_4))_{B'} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(A)_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

es la matriz de T con respecto a las bases B y B'

2) $A(\bar{u})_B = (T(\bar{u}))_{B'}$

$$(\bar{u})_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_B = r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + r_3\bar{v}_3 + r_4\bar{v}_4 \Rightarrow (\bar{u})_B = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A(\bar{u})_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 17 \\ -11 \end{pmatrix} = (T(\bar{u}))_{B'}$$

Reconstruyendo:

$$\begin{aligned} T(\bar{u}) &= -7\bar{w}_1 + 17\bar{w}_2 - 11\bar{w}_3 \\ &= -7\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 17\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 11\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comprobando por el método directo:

$$T\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 3(0) \\ 4 + 0 + 2 \\ -1 - 2(4) - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Nota

1) La matriz de una transformación lineal depende de las bases que se eligen Observamos que en los Ejemplos 7.29 Sección 7.6 y 7.33 se obtienen dos matrices diferentes para la misma transformación lineal.

2) Quizá el lector se está planteando la siguiente pregunta: Porqué utilizar matrices de T con respecto a bases diferentes de las bases estándar si es indiferente usar una u otra base, dado que utilizando otra base que no sea la estándar los cálculos por lo general son más complicados. La respuesta se sustenta en que

puede ocurrir que tengamos que trabajar con espacios vectoriales V y W que no contengan ninguno de los vectores estándar de los espacios en que están sumergidos.

Por ejemplo

$$V = Gen\{(1,-2,3),(1,-1,0)\}$$
$$W = Gen\{(1,0,1,0),(1,1,0,0),(1,-1,0,0)\}$$

Ejemplo 7.33

Sea la TL, $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_1$ definida por

$$T(a+bx+cx^2) = (a-3b) + (2c+b)x$$

y sean $B_1 = \{p_1, p_2, p_3\}$ y $B_2 = \{q_1, q_2\}$ bases de $\mathbb{P}_2$ y $\mathbb{P}_1$ respectivamente donde $p_1(x) = 1-x$, $p_2(x) = x + x^2$, $p_3(x) = 1 - x + x^2$, $q_1(x) = 1-x$, $q_2(x) = -2+3x$. Encontrar:

1) La matriz de T con respecto a las bases B_1 y B_2

2) Utilizando la matriz obtenida en 1). Calcular $T(p(x))$ donde $p(x) = 5-3x+x^2$

1) $(A)_{B_1B_2} = \Big((T(p_1))_{B_2} \;\; (T(p_2))_{B_2} \;\; (T(p_3))_{B_2}\Big)$

$$T(p_1) = T(1-x) = T(1-x+0x^2) = 4-x$$
$$T(p_2) = T(x+x^2) = T(0+x+x^2) = -3+3x$$
$$T(p_3) = T(1-x+x^2) = 4+x$$

$$(T(p_1))_{B_2} = (4-x)_{B_2} = a_1q_1(x) + a_2q_2(x) \Rightarrow (T(p_1))_{B_2} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$4-x = a_1(1-x) + a_2(-2+3x)$$
$$4-x = (a_1-2a_2) + (-a_1+3a_2)x$$

$$\left.\begin{array}{r} a_1 - 2a_2 = 4 \\ -a_1 + 3a_2 = -1 \end{array}\right\} \quad a_1 = 10,\ a_2 = 3 \Rightarrow (T(p_1))_{B_2} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(T(p_2))_{B_2} = (-3 + 3x)_{B_2} = b_1 q_1(x) + b_2 q_2(x) \Rightarrow (T(p_2))_{B_2} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$-3 + 3x = b_1(1 - x) + b_2(-2 + 3x)$$
$$-3 + 3x = (b_1 - 2b_2) + (-b_1 + 3b_2)x$$

$$\left.\begin{array}{r} b_1 - 2b_2 = -3 \\ -b_1 + 3b_2 = 3 \end{array}\right\} \quad b_1 = -3,\ b_2 = 0 \Rightarrow (T(p_2))_{B_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(T(p_3))_{B_2} = (4 + x)_{B_2} = c_1 q_1(x) + c_2 q_2(x) \Rightarrow (T(p_3))_{B_2} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$4 + x = c_1(1 - x) + c_2(-2 + 3x)$$
$$4 + x = (c_1 - 2c_2) + (-c_1 + 3c_2)x$$

$$\left.\begin{array}{r} c_1 - 2c_2 = 4 \\ -c_1 + 3c_2 = 1 \end{array}\right\} \quad c_1 = 14,\ c_2 = 5 \Rightarrow (T(p_3))_{B_2} = \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$(A)_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} 10 & -3 & 14 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

matriz de T con respecto a las bases B_1 y B_2.

2) $A(p(x))_{B_1} = (T(p(x)))_{B_2}$

$$(p(x))_{B_1} = (5 - 3x + x^2)_{B_1} = r_1 p_1(x) + r_2 p_2(x) + r_3 p_3(x)$$

entonces

$$(p(x))_{B_1} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

$$5 - 3x + x^2 = r_1(1 - x) + r_2(x + x^2) + r_3(1 - x + x^2)$$
$$5 - 3x + x^2 = (r_1 + r_3) + (-r_1 + r_2 - r_3)x + (r_2 + r_3)x^2$$

$$\left.\begin{aligned} r_1 + \qquad r_3 &= 5 \\ -r_1 + r_2 - r_3 &= -3 \\ r_2 + r_3 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad r_1 = 6,\ r_2 = 2,\ r_3 = -1 \Rightarrow (p(x))_{B_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A(p(x))_{B_1} = \begin{pmatrix} 10 & -3 & 14 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 13 \end{pmatrix} = (T(p(x)))_{B_2}$$

reconstruyendo

$$\begin{aligned} T(p(x)) &= 40q_1(x) + 13p_2(x) \\ &= 40(1 - x) + 13(-2 + 3x) = 14 - x \end{aligned}$$

Comprobando por el método directo:

$$T(p(x)) = T(5 - 3x + x^2) = 14 - x$$

Los resultados obtenidos se expresan en la siguiente forma:

$$(T(p_1))_{B_2} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow (T(p_1))_{B_2} = 10 + 3x$$

$$(T(p_2))_{B_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (T(p_2))_{B_2} = -3$$

$$(T(p_3))_{B_2} = \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow (T(p_3))_{B_2} = 14 + 5x$$

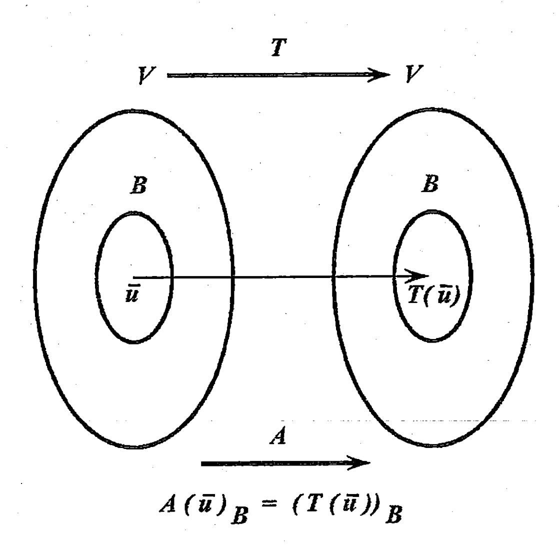
$$(p(x))_{B_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (p(x))_{B_1} = 6 + 2x - x^2$$

Nota

Si $V = W$ se tiene el operador lineal $T : V \to V$, en este caso para elaborar la matriz de T es muy común tomar $B = B'$ (es decir la misma base).

Definición 7.14

A la matriz resultante se le denomina la **matriz de T con respecto a la base B** y se denota $(A)_B$



Ejemplo 7.34

Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un operador lineal definido por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y \\ 6x \end{pmatrix}$$

y sea $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ donde

$$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1) Encontrar la matriz de T con respecto a la base B.

2) Utilizando la matriz obtenida en 1). Calcular

$$T\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

1) $(A)_B = \Big((T(\bar{u}_1))_B \ (T(\bar{u}_2))_B\Big)$

$$T(\bar{u}_1) = T\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$T(\bar{u}_2) = T\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -18 \end{pmatrix}$$

$$(T(\bar{u}_1))_B = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix}_B = a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2 \Rightarrow (T(\bar{u}_1))_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 2a_1 - 3a_2 &= 10 \\ -4a_1 + 5a_2 &= 12 \end{aligned}\right\} \quad a_1 = -43,\ a_2 = -32 \Rightarrow (T(\bar{u}_1))_B = \begin{pmatrix} -43 \\ -32 \end{pmatrix}$$

$$(T(\bar{u}_2))_B = T\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}_B = b_1\bar{u}_1 + b_2\bar{u}_2 \Rightarrow (T(\bar{u}_2))_B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = b_1\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 2b_1 - 3b_2 &= -13 \\ -4b_1 + 5b_2 &= -18 \end{aligned}\right\} \quad b_1 = \frac{119}{2},\ b_2 = 44 \Rightarrow (T(\bar{u}_2))_B = \begin{pmatrix} 119/2 \\ 44 \end{pmatrix}$$

$$(A)_B = \begin{pmatrix} -43 & 119/2 \\ -32 & 44 \end{pmatrix}$$

2) $A(\bar{u})_B = (T(\bar{u}))_B \qquad \bar{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$(\bar{u})_B = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}_B = r_1\bar{u}_1 + r_2\bar{u}_2 \Rightarrow (\bar{u})_B = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix} = r_1\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + r_2\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2r_1 - 3r_2 = -3 \\ -4r_1 + 5r_2 = 8 \end{array}\right\} \quad r_1 = -\frac{9}{2},\ r_2 = -2 \Rightarrow (\bar{u})_B = \begin{pmatrix} -9/2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$A(\bar{u})_B = \begin{pmatrix} -43 & 119/2 \\ -32 & 44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9/2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 149/2 \\ 56 \end{pmatrix} = (T(\bar{u}))_B$$

Reconstruyendo

$$T(\bar{u}) = \frac{149}{2}\bar{u}_1 + 56\bar{u}_2 = \frac{149}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + 56\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ -18 \end{pmatrix}$$

Comprobando por cálculo directo:

$$T\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 - 16 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ -18 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 7.35

Sea el operador lineal $T : \mathbb{M}_{22} \to \mathbb{M}_{22}$ definido por $T(C) = CQ$ donde

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Encontrar una base para el espacio imagen de T.

2) Encontrar una base para el espacio núcleo de T.

3) Encontrar el rango y la nulidad de T.

En efecto:

$$T(C) = T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + b & 2b \\ -c + d & 2d \end{pmatrix}$$

Se requiere convertir la TL dada en una TM.
En este caso se necesita conocer la matriz de T con respecto a una base. Cuando el problema no fija la base, entonces se elige una base. ¿Qué base? la base estándar u ordinaria que es la más fácil para operar.
Entonces elegimos la base estándar $B = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ de $\mathbb{M}_{22}$

$$(A)_B = \Big((T(M_1))_B \ \ (T(M_2))_B \ \ (T(M_3))_B \ \ (T(M_4))_B \Big)$$

$$T(M_1) = T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad T(M_2) = T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(M_3) = T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad T(M_4) = T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(T(M_1))_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_B = a_1M_1 + a_2M_2 + a_3M_3 + a_4M_4 \Rightarrow (T(M_1))_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

Un vector en la base estándar es el mismo vector.

$$(T(M_1))_B = -1M_1 + 0M_2 + 0M_3 + 0M_4 \Rightarrow (T(M_1))_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(T(M_2))_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (T(M_3))_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (T(M_4))_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(A)_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es la matriz de T con respecto a la base estándar B.

1)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

El espacio de la $Img(T)$ está generado por el espacio de las columnas de A.

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{OEF}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E^T$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Img(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$Img(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2) $Ker(T) = \{M \in \mathbb{M}_{22} / T(M) = 0\}$

$$T(M) = A(M) = 0$$

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \Rightarrow (M)_B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

$$A(M)_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es un SHEL.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{OEF}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_A$$

$r(A) = 4 = n$ entonces el sistema tiene solución única, la solución trivial luego $x = y = z = w = 0$

$$Ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow Ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

3)

$$R(T) = \dim Img(T) = 4$$
$$N(T) = \dim Ker(T) = 0$$
$$R(T) + N(T) = \dim \mathbb{M}_{22} = 4$$

7.9 Ejercicios propuestos

1) $\mathbb{M}_{22} = \{$espacio de las matrices cuadradas de orden 2$\}$

Sea $T : \mathbb{M}_{22} \to \mathbb{M}_{22}$ un operador lineal, sean $B = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ y $B' = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$ bases de $\mathbb{M}_{22}$ donde:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad N_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad N_3 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad N_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Si

$$T(M_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad T(M_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$T(M_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad T(M_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallar

$$T\begin{pmatrix} \dot{a} & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ y } T\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) Encontrar la matriz de T con respecto a la base B.

(c) Encontrar la matriz de T con respecto a las bases B y B'.

(d) Si

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},$$

hallar $(T(M))_{B'}$ usando la matriz del paso c)

Rpta:

(a) $$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b+c & a-2b+c \\ a-c & a-b \end{pmatrix},$$

$$T\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) $$(A)_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) $$(A)_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(d) $$A(M)_B = (T(M))_{B'},$$

$$(T(M))_{B'} = \begin{pmatrix} 32 & -11 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

2) Sean $B_1 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4, \bar{u}_5\}$ y $B_2 = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\}$ bases de $\mathbb{R}^5$ y $\mathbb{R}^4$ respectivamente.

Sea $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ una T.L. tal que

$$T(\bar{u}_1) = \bar{v}_1 - 2\bar{v}_2 + 3\bar{v}_3 + \bar{v}_4$$

$$T(\bar{u}_2) = 2\bar{v}_1 + 5\bar{v}_2 - 2\bar{v}_3$$
$$T(\bar{u}_3) = 4\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + 4\bar{v}_3 + 2\bar{v}_4$$
$$T(\bar{u}_4) = \bar{v}_1 - 3\bar{v}_2 + 5\bar{v}_3 + 2\bar{v}_4$$
$$T(\bar{u}_5) = -\bar{v}_1 - 8\bar{v}_2 + 7\bar{v}_3 + d\bar{v}_4$$

(a) Calcular la matriz de T en las bases B_1 y B_2

(b) Si el rango de la matriz obtenida en a) es 3. Calcular "d"

3) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un operador lineal y sea $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$, $B' = \{\bar{w}_1, \bar{w}_2\}$ bases de $\mathbb{R}^2$. Se sabe que $T(\bar{u}_1) = 3\bar{u}_1 - 2\bar{u}_2$, $T(\bar{u}_2) = \bar{u}_1 + 4\bar{u}_2$ y $\bar{w}_1 = \bar{u}_1 + \bar{u}_2$, $\bar{w}_2 = 2\bar{u}_1 + 3\bar{u}_2$

(a) Encontrar la matriz de T con respecto a la base B.

(b) Encontrar la matriz de T con respecto a la base B'.

Rpta:

(a) $(A)_B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $(A)_{B'} = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

4) $\mathbb{M}_{mn} = \{$espacio de las matrices de orden $m \times n$ con elementos reales$\}$

Sea $T : \mathbb{M}_{22} \to \mathbb{M}_{23}$ una TL, $B_1 = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ y $B_2 = \{N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6\}$ bases de $\mathbb{M}_{22}$ y $\mathbb{M}_{23}$ respectivamente donde

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad N_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Además

$$T(M_1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad T(M_2) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$T(M_3) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T(M_4) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Hallar

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(b) Encontrar la matriz de T con respecto a las bases B_1 y B_2.

5) Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una TL definida por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + z + w \\ x + 2z - w \\ x + y + 3z - 3w \end{pmatrix}$$

Sean $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4\}$ y $B' = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ bases de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente donde

$$\bar{u}_1 = (1,0,1,2)^T,\ \bar{u}_2 = (0,1,2,1)^T,\ \bar{u}_3 = (0,0,1,1)^T,\ \bar{u}_4 = (1,1,0,1)^T$$
$$\bar{v}_1 = (1,0,0)^T, \quad \bar{v}_2 = (1,1,-1)^T, \quad \bar{v}_3 = (0,0,1)^T$$

(a) Encontrar la matriz de T con respecto a las bases B y B'

(b) Usando la matriz obtenida en a), calcular $(T(\bar{u}))_{B'}$ si $\bar{u} = (-2,-1,5,0)^T$

Rpta:

(a) $(A)_{BB'} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $(T(\bar{u}))_{B'} = (-4,8,20)^T$

6) $\mathbb{M}_{mn} = \{$espacio de las matrices de orden $m \times n$ con elementos reales$\}$

Sea $T : \mathbb{M}_{23} \to \mathbb{M}_{13}$ una T.L. definida por $T(C) = (3,-5)C$ donde $C \in \mathbb{M}_{23}$. Sean $B = \{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6\}$ y $B' = \{N_1, N_2, N_3\}$ bases canónicas de $\mathbb{M}_{23}$ y $\mathbb{M}_{13}$ respectivamente.

(a) Encontrar la matriz de T con respecto a las bases B y B'

(b) Usando la matriz obtenida en la parte a). Calcular $T(M)$, si

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

7) $\mathbb{P}_n = \{$espacio de los polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes reales$\}$

Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_1$ una T.L. tal que $T(ax^2+bx+c) = (2a+b+c)+(a-c)x$ y $B_1 = \{p_1, p_2, p_3\}$ y $B_2 = \{q_1, q_2\}$ son bases de $\mathbb{P}_2$ y $\mathbb{P}_1$ respectivamente, donde $p_1(x) = x^2+1,\ p_2(x) = x,\ p_3(x) = 1,\ q_1(x) = x+1,\ q_2(x) = 3$. Hallar la matriz de T con respecto a las bases B_1 y B_2

Rpta: $(A)_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

8) $\mathbb{P}_n = \{$espacio de los polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes reales$\}$

Sea $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2$ una T.L. tal que $T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = dx^2 + cx + b$ y sean $B_1 = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, $B_2 = \{q_1, q_2, q_3\}$ bases de $\mathbb{P}_3$ y $\mathbb{P}_2$ respectivamente donde:

$$p_1(x) = x^3 - x + 2 \qquad p_2(x) = x^3 + x^2 + 3x + 1$$
$$p_3(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 1 \qquad p_4(x) = -x^2 + 1$$

$$q_1(x) = x^2 + x, \qquad q_2(x) = x + 1, \qquad q_3(x) = x^2 + 1$$

(a) Encontrar la matriz de T con respecto a las bases B_1 y B_2.

(b) Usando la matriz obtenida en a), calcular $(T(p(x)))$ si $p(x) = x^3-5x+4$

9) $\mathbb{P}_n = \{$espacio de los polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes reales$\}$

Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_1$ una T.L. tal que $T(ax^2 + bx + c) = (a + c)x - (b + a)$ y sean $B_1 = \{p_1, p_2, p_3\}$ y $B_2 = \{q_1, q_2\}$ bases de $\mathbb{P}_2$ y $\mathbb{P}_1$ respectivamente donde

$$p_1(x) = x^2 + x + 1, \qquad p_2(x) = 2x^2 + 2x + 3, \qquad p_3(x) = x^2 + 3$$
$$q_1(x) = 2x + 3, \qquad q_2(x) = 3x - 4$$

(a) Hallar la matriz de T con respecto a las bases B_1 y B_2

(b) Usando la matriz obtenida en a), calcular $T(3x^2 - 1)$

Rpta:

(a) $(A)_{B_1B_2} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 2 & 8 & 13 \\ 10 & 23 & 14 \end{pmatrix}$

(b) $A(p(x))_{B_1} = \begin{pmatrix} -1/17 \\ 12/17 \end{pmatrix} = (T(p(x)))_{B_2}$,

$T(p(x)) = 2x - 3$

10) $\mathbb{M}_{22}$ = {espacio de las matrices cuadradas de orden 2 con elementos reales}

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{M}_{22}$ una T.L. definida por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & x-y \\ y-z & x+z \end{pmatrix}$$

y sean $B_1 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ y $B_2 = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{M}_{22}$ respectivamente, donde

$$\bar{u}_1 = (1,0,0)^T, \quad \bar{u}_2 = (1,1,0)^T, \quad \bar{u}_3 = (1,1,1)^T$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Encontrar la matriz de T con respecto a las bases B_1 y B_2

(b) Usando la matriz obtenida en a), calcular $T(-2, 1, 3)$

11) $\mathbb{M}_{22}$ = {espacio de las matrices cuadradas de orden 2 con elementos reales} y sea $T : \mathbb{R}^5 \to M_{22}$ una T.L. tal que

$$T(x, y, z, v, w) = \begin{pmatrix} x + 2y + z + 3v & 2x - 2z - 2v + w \\ 4x + y - 3z - 2v + 2w & 5x - 2y - 7z - 9v + w \end{pmatrix}$$

$B_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ es la base estándar de $\mathbb{R}^5$

$B_2 = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ es una base para $\mathbb{M}_{22}$ donde

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Encontrar la matriz de T con respecto a las bases B_1 y B_2

(b) Usando la matriz obtenida en la parte (a) calcular $T(\bar{u})$ si $\bar{u} = (1, -2, 0, 1, 0)^T$

Rpta:

(a) $$(A)_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 4 & 7 & 1 \\ 5 & -2 & -7 & -9 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) $$T(\bar{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

12) $\mathbb{P}_2 = \{$espacio de los polinomios de grado ≤ 2 con coeficientes reales$\}$

Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ un operador lineal definido por

$$T(c + bx + ax^2) = (3c + 2b - 2a) + (-3c - b + 3a)x + (c + 2b)x^2$$

(a) Encontrar la matriz de T con respecto a la base estándar B de $\mathbb{P}_2$

(b) Usando la matriz obtenida en a), calcular $T(p(x))$ si $p(x) = 1 - 2x - x^2$

13) $\mathbb{M}_{22} = \{$espacio de las matrices cuadradas de orden 2 con elementos reales$\}$

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{M}_{22}$ una T.L. y $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ una base para $\mathbb{R}^3$ donde

$$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si

$$T(\bar{u}_1) = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad T(\bar{u}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad T(\bar{u}_3) = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Encontrar

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(b) Encontrar la matriz de T con respecto a la base B de $\mathbb{R}^3$ y a la base estándar B_1 de $\mathbb{M}_{22}$

Rpta:

(a) $$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z-3x & 3x+y \\ -2x+2y+6z & 6x-y-5z \end{pmatrix}$$

(b) $$(A)_{BB_1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

14) $\mathbb{P}_2 =$ {espacio de los polinomios de grado ≤ 2 con coeficientes reales}

Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ un operador lineal y $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ es una base para $\mathbb{P}_2$ donde $p_1(x) = 3x + 3x^2,\ p_2(x) = -1 + 3x + 2x^2,\ p_3(x) = 3 + 7x + 2x^2$

$$(T(p_1))_B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (T(p_2))_B = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (T(p_3))_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(a) Calcular $T(3p_1 - 2p_2 + p_3)$

(b) Calcular $3(p_1)_B - 2(p_2)_B + (p_3)_B$

15) $\mathbb{C} =$ {espacio de los números complejos}

Sea $T : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^3$ una TL. y sea $B = \{z_1, z_2\}$ una base de $\mathbb{C}$ donde $z_1 = -1 + 3i, z_2 = 4 - 10i$. Si $T(z_1) = (-5, 1, 2)^T$ y $T(z_2) = (4, 0, -6)^T$

(a) Encontrar $T(a + bi)$

(b) Encontrar la matriz de T con respecto a la base B de $\mathbb{C}$ y a la base estándar B_1 de $\mathbb{R}^3$

(c) Usando la matriz obtenida en b) calcular $T(z_1 + z_2)$

Rpta:

(a) $T(a+bi) = \begin{pmatrix} -19a-8b \\ 5a+2b \\ a+b \end{pmatrix}$

(b) $(A)_{BB_1} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 1 & 0 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$

(c) $T(z_1+z_2) = (-1,1,-4)^T$

7.10 Cambio de base

Hemos visto que un vector de coordenadas cambia cuando se cambia la base para un determinado espacio vectorial. En algunos problemas es necesario cambiar la base, sucede que a veces se requiere de bases más convenientes. Existe un número infinito de bases de donde escoger, ya que en un espacio vectorial de dimensión n cualesquiera n vectores LI forman una base. Ahora veremos cómo cambiar de una base a otra mediante el cálculo de una determinada matriz.

Definición 7.15

Sean $B_1 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n\}$ y $B_2 = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ bases de un espacio vectorial V, entonces la **matriz de transición de B_1 a B_2** es la matriz cuadrada de orden n

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

donde

$$(\bar{u}_1)_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \quad (\bar{u}_2)_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, (\bar{u}_n)_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

Nota

Debe entenderse la transición como el paso de una “base antigua” a una “base nueva” y usaremos la notación $P : B_1 \to B_2$ ó $B_1 \xrightarrow{P} B_2$

Ejemplo 7.36

Sean $B_1 = \{e_1, e_2\}$ y $B_2 = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ donde

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Encontrar:

1) La matriz de transición de la base B_1 a la base B_2.

2) La matriz de transición de la base B_2 a la base B_1.

1) $P : B_1 \to B_2$

$$P = \Big((e_1)_{B_2} \; (e_2)_{B_2} \Big)$$

$$(e_1)_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_2} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 \Rightarrow (e_1)_{B_2} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 2a_1 + 5a_2 &= 1 \\ 3a_1 + 7a_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad a_1 = -7,\ a_2 = 3 \Rightarrow (e_1)_{B_2} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(e_2)_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_2} = b_1\bar{v}_1 + b_2\bar{v}_2 \Rightarrow (e_2)_{B_2} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 2b_1 + 5b_2 &= 0 \\ 3b_1 + 7b_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad b_1 = 5,\ b_2 = -2 \Rightarrow (e_2)_{B_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

matriz de transición de B_1 a B_2.

2) $Q : B_2 \rightarrow B_1$ (Q matriz de transición de la base B_2 a la base B_1)

$$Q = \left((\bar{v}_1)_{B_1} \ (\bar{v}_2)_{B_1}\right)$$

$B_1 = \{e_1, e_2\}$ es la base estándar para $\mathbb{R}^2$ entonces: un vector en la base estándar es el mismo vector

$$(\bar{v}_1)_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (\bar{v}_2)_{B_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Analicemos Q: Q es una matriz no singular puesto que $|Q| = -1 \neq 0$ entonces

$$\exists\, Q^{-1} = \frac{1}{(-1)} \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = P \Rightarrow Q = P^{-1}$$

Nota

Si P es la matriz de transición de la base B_1 a la base B_2 entonces P^{-1} es la matriz de transición de la base B_2 a la base B_1

$$B_1 \underset{P^{-1}}{\overset{P}{\rightleftarrows}} B_2$$

Ejemplo 7.37

Sean $B_1 = \{p_1, p_2, p_3\}$ y $B_2 = \{q_1, q_2, q_3\}$ bases del espacio vectorial $\mathbb{P}_2$ donde B_1 es la base estándar y $q_1(x) = 1 + x + 2x^2$, $q_2(x) = 1 + x^2$, $q_3(x) = 2 + x + 2x^2$.

Encontrar

1) La matriz de transición de la base B_1 a la base B_2.

2) La matriz de transición de la base B_2 a la base B_1.

1) $P : B_1 \to B_2$

$$P = \Big((p_1)_{B_2}\ (p_2)_{B_2}\ (p_3)_{B_2}\Big)$$

$$(p_1)_{B_2} = (1)_{B_2} = a_1q_1(x) + a_2q_2(x) + a_3q_3(x) \Rightarrow (p_1)_{B_2} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$1 = a_1(1 + x + 2x^2) + a_2(1 + x^2) + a_3(2 + x + 2x^2)$$

$$1 + 0x + 0x^2 = (a_1 + a_2 + 2a_3) + (a_1 + a_3)x + (2a_1 + a_2 + 2a_3)x^2$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 + 2a_3 &= 1 \\ a_1 + \qquad a_3 &= 0 \\ 2a_1 + a_2 + 2a_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad a_1 = -1,\ a_2 = 0,\ a_3 = 1 \Rightarrow (p_1)_{B_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(p_2)_{B_2} = (x)_{B_2} = b_1q_1(x) + b_2q_2(x) + b_3q_3(x) \Rightarrow (p_2)_{B_2} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$x = b_1(1 + x + 2x^2) + b_2(1 + x^2) + b_3(2 + x + 2x^2)$$

$$0 + x + 0x^2 = (b_1 + b_2 + 2b_3) + (b_1 + b_3)x + (2b_1 + b_2 + 2b_3)x^2$$

$$\left.\begin{aligned} b_1 + b_2 + 2b_3 &= 0 \\ b_1 + \qquad b_3 &= 1 \\ 2b_1 + b_2 + 2b_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad b_1 = 0,\ b_2 = -2,\ b_3 = 1 \Rightarrow (p_2)_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(p_3)_{B_2} = (x^2)_{B_2} = c_1q_1(x) + c_2q_2(x) + c_3q_3(x) \Rightarrow (p_3)_{B_2} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$x^2 = c_1(1 + x + 2x^2) + c_2(1 + x^2) + c_3(2 + x + 2x^2)$$

$$0 + 0x + x^2 = (c_1 + c_2 + 2c_3) + (c_1 + c_3)x + (2c_1 + c_2 + 2c_3)x^2$$

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 + 2c_3 &= 0 \\ c_1 + \qquad c_3 &= 0 \\ 2c_1 + c_2 + 2c_3 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad c_1 = 1,\ c_2 = 1,\ c_3 = -1 \Rightarrow (p_3)_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

es la matriz de transición de la base B_1 a la base B_2.

2) $Q : B_2 \to B_1$

$$Q = \big((q_1)_{B_1}\ (q_2)_{B_1}\ (q_3)_{B_1}\big)$$

$(q_i)_{B_1} = q_i$ para $i = 1, 2, 3$ puesto que B_1 es la base estándar de $\mathbb{P}_2$.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Comprobando

$$PQ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \Rightarrow Q = P^{-1}$$

Nota

En los ejemplos anteriores se ha verificado que $Q = P^{-1}$, el siguiente teorema muestra que este resultado no es una casualidad.

Teorema 7.10

Si P es la matriz de transición de la base B_1 a la base B_2 para un espacio vectorial V de dimensión finita entonces

1) P es invertible.

2) P^{-1} es la matriz de transición de la base B_2 a la base B_1.

(Se omite la demostración)

Nota

Las matrices de transición establecen la relación que existe entre los vectores de coordenadas cuando se efectúa un cambio de base, como pone en evidencia el siguiente teorema.

Teorema 7.11

Sea P la matriz de transición de la base B_1 a la base B_2 para un espacio vectorial V de dimensión finita entonces los vectores de coordenadas $(\bar{x})_{B_1}$ y $(\bar{x})_{B_2}$ están relacionados por la ecuación

$$P(\bar{x})_{B_1} = (\bar{x})_{B_2}$$

Demostración. Demostramos para un espacio vectorial V de dimensión 2.
Sean $B_1 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ y $B_2 = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ bases de un espacio vectorial V y sea

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

la matriz de transición de la base B_1 a la base B_2 (la nueva base)
Por lo tanto:

$$(\bar{u}_1)_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{u}_1 = a_{11}\bar{v}_1 + a_{21}\bar{v}_2$$

$$(\bar{u}_2)_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{u}_2 = a_{12}\bar{v}_1 + a_{22}\bar{v}_2$$

Supongamos que $\bar{x} \in V$ entonces debemos demostrar que

$$(\bar{x})_{B_2} = P(\bar{x})_{B_1}$$

Si

$$(\bar{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

es el vector de coordenadas de $\bar{x}$ con respecto a la base B_1 entonces:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= c_1\bar{u}_1 + c_2\bar{u}_2\\ &= c_1(a_{11}\bar{v}_1 + a_{21}\bar{v}_2) + c_2(a_{12}\bar{v}_1 + a_{22}\bar{v}_2)\\ &= (c_1a_{11} + c_2a_{12})\bar{v}_1 + (c_1a_{21} + c_2a_{22})\bar{v}_2\end{aligned}$$

$$(\bar{x})_{B_2} = \begin{pmatrix} c_1a_{11} + c_2a_{12}\\ c_1a_{21} + c_2a_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\end{pmatrix} = P(\bar{x})_{B_1}$$

Este procedimiento se puede generalizar para un espacio vectorial de dimensión n. ◇

Nota

Para ilustrar la relación que establece el Teorema 7.11 tenemos

$$P : B_1 \to B_2 \Rightarrow P(\bar{x})_{B_1} = (\bar{x})_{B_2} \quad \forall \bar{x} \in V$$
$$(\bar{x})_{B_1} = P^{-1}(\bar{x})_{B_2}$$

Ejemplo 7.38

Si $B_1 = \{e_1, e_2\}$ y $B_2 = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ son bases de $\mathbb{R}^2$ donde

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1\\ 0\end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0\\ 1\end{pmatrix}, \qquad \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 2\\ 3\end{pmatrix}, \qquad \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 5\\ 7\end{pmatrix}$$

1) Encontrar la matriz de transición de la base B_1 a la base B_2.

2) Utilizando la matriz obtenida en 1). Calcular $(\bar{x})_{B_2}$ si

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 13\\ -8\end{pmatrix}$$

1) En el Ejemplo 7.36 se encontró que

$$P = \begin{pmatrix} -7 & 5\\ 3 & -2\end{pmatrix}$$

es la matriz de transición de la base B_1 a la base B_2.

2) $P : B_1 \to B_2 \Rightarrow P(\bar{x})_{B_1} = (\bar{x})_{B_2}$

$$(\bar{x})_{B_2} = P(\bar{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ -8 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -131 \\ 55 \end{pmatrix}$$

puesto que B_1 es la base estándar.

Comprobando:

$$(\bar{x})_{B_2} = \begin{pmatrix} 13 \\ -8 \end{pmatrix}_{B_2} = r_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow (\bar{x})_{B_2} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2r_1 + 5r_2 = 13 \\ 3r_1 + 7r_2 = -8 \end{array}\right\} \quad r_1 = -131, \; r_2 = 55 \Rightarrow \begin{pmatrix} 13 \\ -8 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} -131 \\ 55 \end{pmatrix}$$

obtenemos el mismo resultado.

Nota

Si se tiene la matriz de transición de una base a otra es muy fácil expresar un vector en una u otra base porque el problema se reduce a multiplicar matrices.

Ejemplo 7.39

Si $B_1 = \{p_1, p_2, p_3\}$ y $B_2 = \{q_1, q_2, q_3\}$ son bases del espacio vectorial $\mathbb{P}_2$ donde B_1 es la base estándar y $q_1(x) = 1 + x + 2x^2$, $q_2(x) = 1 + x^2$, $q_3(x) = 2 + x + 2x^2$

1) Encontrar la matriz de transición de la base B_1 a la base B_2.

2) Utilizando la matriz obtenida en 1). Calcular $(p(x))_{B_2}$ si $p(x) = 1 - 7x^2$.

1) En el Ejemplo 7.37 se encontró que

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2) $P : B_1 \to B_2 \Rightarrow P(p(x))_{B_1} = (p(x))_{B_2}$

$$(p(x))_{B_2} = P(1-7x^2)_{B_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}_{B_1}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

puesto que B_1 es la base estándar.

Por lo tanto

$$(p(x))_{B_2} = -8 - 7x + 8x^2.$$

Ejemplo 7.40

Sean $B = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ y $B' = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$ bases de $\mathbb{M}_{22}$ donde B es la base estándar y

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Encontrar:

1) La matriz de transición de la base B a la base B'.

2) La matriz de transición de la base B' a la base B.

3) Si

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcular $(M)_{B'}$ y $(M)_B$ utilizando las matrices obtenidas en 1) y 2)

1) $P : B \to B'$

$$P = \Big((M_1)_{B'} \ (M_2)_{B'} \ (M_3)_{B'} \ (M_4)_{B'}\Big)$$

$$(M_1)_{B'} = a_1N_1 + a_2N_2 + a_3N_3 + a_4N_4 \Rightarrow (M_1)_{B'} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{B'} = a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 1 \\ a_2 + a_3 + a_4 &= 0 \\ a_3 + a_4 &= 0 \\ a_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (M_1)_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(M_2)_{B'} = b_1N_1 + b_2N_2 + b_3N_3 + b_4N_4 \Rightarrow (M_2)_{B'} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{B'} = b_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 + b_4 &= 0 \\ b_2 + b_3 + b_4 &= 1 \\ b_3 + b_4 &= 0 \\ b_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (M_2)_{B'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(M_3)_{B'} = c_1N_1 + c_2N_2 + c_3N_3 + c_4N_4 \Rightarrow (M_3)_{B'} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{B'} = c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} c_1+c_2+c_3+c_4&=0\\ c_2+c_3+c_4&=0\\ c_3+c_4&=1\\ c_4&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (M_3)_{B'}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$(M_4)_{B'}=d_1N_1+d_2N_2+d_3N_3+d_4N_4 \Rightarrow (M_4)_{B'}=\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\\d_4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}_{B'}=d_1\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+d_2\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+d_3\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}+d_4\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} d_1+d_2+d_3+d_4&=0\\ d_2+d_3+d_4&=0\\ d_3+d_4&=0\\ d_4&=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (M_4)_{B'}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

2) $Q : B' \to B$

$$Q=\Big((N_1)_B\ (N_2)_B\ (N_3)_B\ (N_4)_B\Big)$$

$$=\Big(N_1\ N_2\ N_3\ N_4\Big)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

puesto que B es la base estándar de $\mathbb{M}_{22}$

$$Q=P^{-1}$$

3) $P : B \to B'$ entonces $P(M)_B = (M)_{B'}$ y $(M)_B = P^{-1}(M)_{B'}$

$$(M)_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$$

puesto que B es la base estándar

$$P(M)_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -11 \\ 5 \end{pmatrix} = (M)_{B'}$$

Por otro lado: $P^{-1}(M)_{B'} = (M)_B$

$$(M)_{B'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}_{B'} = r_1N_1 + r_2N_2 + r_3N_3 + r_4N_4 \Rightarrow (M)_{B'} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} r_1 + r_2 + r_3 + r_4 &= 2 \\ r_2 + r_3 + r_4 &= 0 \\ r_3 + r_4 &= -6 \\ r_4 &= 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (M)_{B'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -11 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}(M)_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -11 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} = (M)_B$$

entonces

$$(M)_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} = M$$

puesto que B es la base estándar.

7.11 Ejercicios propuestos

1) $\mathbb{M}_{22}$ = {espacio de las matrices cuadradas de orden 2 con elementos reales}

Sea $B_1 = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$ y $B_2 = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ bases de $\mathbb{M}_{22}$ donde B_1 es la base estándar y

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Hallar la matriz de transición P de la base B_1 a la base B_2.

(b) Usando la matriz P, si

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

calcular $(M)_{B_1}$ y $(M)_{B_2}$

Rpta:

(a) $$P = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 3/2 \\ 1/5 & -2/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

(b) $$(M)_{B_1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad (M)_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2) $\mathbb{P}_2$ = {espacio de los polinomios de grado ≤ 2 con coeficientes reales}

Sean $B_1 = \{1, x, x^2\}$ y $B_2 = \{1, 1+x, (1+x)^2\}$ bases de $\mathbb{P}_2$.

(a) Encontrar la matriz de transición P de la base B_1 a B_2.

(b) Si $p(x) = x^2 - 2x + 5$, usando P, calcular $(p(x))_{B_2}$

3) $\mathbb{M}_{22}$ = {espacio de las matrices cuadradas de orden 2 con elementos reales}

Sea el operador lineal $F : \mathbb{M}_{22} \to \mathbb{M}_{22}$ tal que $F(A) = AM - MA$ para

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Encontrar una base para el espacio núcleo de F.

(b) Sea $B = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ y $B' = \{M_1', M_2', M_3', M_4'\}$ bases del espacio $\mathbb{M}_{22}$ donde B es la base estándar y

$$M_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_2' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_3' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_4' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Si P es la matriz de transición de la base B a la base B' y

$$N = \begin{pmatrix} -10 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix},$$

usando P, calcular $(N)_{B'}$

Rpta:

(a) $$Ker(F) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) $$P = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P(N)_B = P \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = (N)_{B'}$$

4) $\mathbb{C} = \{$espacio de los números complejos$\}$

Sea $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un operador lineal tal que $T(1) = 5 - 2i$, $T(i) = -i$

Si $B = \{z_1, z_2\}$, $B' = \{z_3, z_4\}$ con bases de $\mathbb{C}$ donde

$$z_1 = 2 + 3i, \quad z_2 = 4 - i, \quad z_3 = 2i, \quad z_4 = 2$$

(a) Encontrar la matriz de transición P de la base B a B'.

(b) Encontrar la matriz de transición Q de la base B' a B.

(c) Expresar las raíces de la ecuación $2x^3 - x^2 + 8x - 4 = 0$ en las bases B y B' respectivamente, usando la matriz P

5) $\mathbb{P}_2 = \{$espacio de los polinomios de grado ≤ 2 con coeficientes reales$\}$

$B = \{p_1, p_2, p_3\}$ y $B' = \{q_1, q_2, q_3\}$ son bases de $\mathbb{P}_2$ donde

$$p_1(x) = x^2 + 1, \qquad p_2(x) = x - 2, \qquad p_3(x) = x + 3$$
$$q_1(x) = 2x^2 + x, \qquad q_2(x) = x^2 + 3, \qquad q_3(x) = x$$

(a) Encontrar la matriz de transición de la base B a B' y la matriz de transición de la base B' a B.

(b) Usando el resultado de la parte a) expresar $p(x) = 7x^2 - x + 9$ en la base B' y $t(x) = 8x^2 - 4x + 6$ en la base B.

Rpta:

(a) $$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -1/2 \\ 1/3 & -2/3 & 1 \\ -1/3 & 2/3 & 3/2 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = Q = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 & 5 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) $$P(p(x))_B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 6 \\ -2 & 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = (p(x))_{B'}$$

$$\Rightarrow (p(x))_{B'} = 2x^2 + 3x - 3$$

$$P^{-1}(t(x))_{B'} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 & 5 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 40 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix} = (t(x))_B$$

$$\Rightarrow (t(x))_B = 8x^2 - \frac{7}{5}x - \frac{8}{5}$$

6) $\mathbb{M}_{22} = \{$espacio de las matrices cuadradas de orden 2 con elementos reales$\}$

Sean $B_1 = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ y $B_2 = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$ bases de $\mathbb{M}_{22}$ donde

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Encontrar la matriz de transición P de la base B_1 a B_2

(b) Usando la matriz obtenida en la parte a) si $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ calcular $(A)_B$ y $(A)_{B_2}$

7) $\mathbb{M}_{22}$ = {espacio de las matrices cuadradas de orden 2 con elementos reales}

Sean $B_1 = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ y $B_2 = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$ bases de $\mathbb{M}_{22}$ donde B_1 es la base estándar y

$$N_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad N_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Hallar la matriz de transición P de la base B_1 a B_2.

(b) Usando P, si $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, hallar $(M)_{B_1}$ y $(M)_{B_2}$

Rpta:

(a) $$P = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) $$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(M)_{B_1} = P\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = (M)_{B_2} \Rightarrow (M)_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(M)_{B_1} = P^{-1}(M)_{B_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (M)_{B_1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

8) $\mathbb{P}_2$ = {espacio de los polinomios de grado ≤ 2 con coeficientes reales}

y sean $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ y $B' = \{q_1, q_2, q_3\}$ donde $p_1(x) = 1 - x,\ p_2(x) = 1 + x,\ p_3(x) = x^2,\ q_1(x) = 1 + x,\ q_2(x) = 1 + 2x,\ q_3(x) = 4 + x + x^2$ bases del espacio vectorial $\mathbb{P}_2$.

(a) Hallar la matriz de transición P de la base B a la base B'.

(b) Hallar la matriz de transición Q de la base B' a la base B.

(c) Usando la matriz P, si $p(x) = 7 - 2x + x^2$ hallar $(p(x))_B$ y $(p(x))_{B'}$.

9) $\mathbb{M}_{22}$ = {espacio de las matrices cuadradas de orden 2 con elementos reales}

Sean $B = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ y $B' = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$ bases del espacio vectorial $\mathbb{M}_{22}$ donde:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\quad M_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad N_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad N_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Encontrar la matriz de transición P de la base B a la base B'.

(b) Si

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

usando la matriz P, hallar $(M)_{B'}$ es decir M en la base B'.

Rpta:

(a) $$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) $$(M)_{B'} = P(M)_B = P \begin{pmatrix} 6 \\ 5/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (M)_{B'} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

10) $\mathbb{P}_2 = \{$espacio de los polinomios de grado ≤ 2 con coeficientes reales$\}$

y sean $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ y $B' = \{q_1, q_2, q_3\}$ bases del espacio vectorial $\mathbb{P}_2$ donde $p_1(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$, $p_2(x) = -(x-2)x$, $p_3(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$, $q_1(x) = 1$, $q_2(x) = 1 + x$, $q_3(x) = 1 + x + x^2$

(a) Hallar la matriz de transición P de la base B a la base B'.

(b) Hallar la matriz de transición Q de la base B' a la base B.

(c) Usando la matriz P, si $p(x) = -1+3x-4x^2$, hallar $(p(x))_B$ y $(p(x))_{B'}$

11) $\mathbb{M}_{22} = \{$espacio de las matrices cuadradas de orden 2 con elementos reales$\}$

Sean $B_1 = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ y $B_2 = \{M'_1, M'_2, M'_3, M'_4\}$ bases de $\mathbb{M}_{22}$ donde

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$M'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M'_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M'_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Encontrar la matriz de transición P de la base B_1 a la base B_2.

(b) Encontrar la matriz de transición Q de la base B_2 a la base B_1.

(c) Si

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix},$$

calcular $(M)_{B_1}$ y $(M)_{B_2}$ usando las matrices P y Q.

Rpta:

(a) $$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) $$Q = P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) $$(M)_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P(M)_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (M)_{B_2}$$

$$\Rightarrow (M)_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(M)_{B_1} = P^{-1}(M)_{B_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (M)_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

12) $\mathbb{M}_{22}$ = {espacio de las matrices cuadradas de orden 2 con elementos reales} y sean $B = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ y $B_1 = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$ bases de $\mathbb{M}_{22}$ donde

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_4 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Encontrar la matriz de transición P de la base B a la base B_1.

(b) Encontrar la matriz de transición Q de la base B_1 a la base B.

(c) Usando las matrices P y Q, calcular $(M)_B$ y $(M)_{B_1}$ si $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

7.12 Semejanza

Dado que la matriz de una transformación lineal (TL) depende de las bases que se empleen para los espacios vectoriales, es decir la matriz cambia cuando se cambian las bases. Entonces, al efectuar un cambio de base, surge la pregunta ¿existe alguna relación entre la matriz anterior con la nueva matriz de un operador lineal? la respuesta es afirmativa, si existe relación, la misma que se establece en el siguiente teorema.

Teorema 7.12

Sea $T : V \to V$ un operador lineal en un espacio vectorial V de dimensión finita, si A es la matriz de T con respecto a la base B y A' es la matriz de T con respecto a la base B', entonces: $A' = P^{-1}AP$ donde P es la matriz de transición de la base B' a la base B.

Demostración. Hagamos una descripción gráfica de la relación $A(\bar{u}) = \bar{v}$ escribiendo $\bar{u} \xrightarrow{A} \bar{v}$

Si A es la matriz de T con respecto a la base B entonces

$$A(\bar{u})_B = (T(\bar{u}))_B \quad \forall \bar{u} \in V$$

Si A' es la matriz de T con respecto a la base B' entonces

$$A'(\bar{u})_{B'} = (T(\bar{u}))_{B'}; \quad \forall \bar{u} \in V$$

Estas ecuaciones se pueden representar así:

$$\begin{array}{ccc} (\bar{u})_B & \xrightarrow{A} & (T(\bar{u}))_B \\ (\bar{u})_{B'} & \xrightarrow{A'} & (T(\bar{u}))_{B'} \end{array} \tag{7.9}$$

Si P es la matriz de transición de la base B' a la base B entonces

$$P(\bar{u})_{B'} = (\bar{u})_B$$

Si P^{-1} es la matriz de transición de la base B a la base B' entonces

$$P^{-1}(\bar{u})_B = (\bar{u})_{B'}$$

$$P^{-1}(T(\bar{u}))_B = (T(\bar{u}))_{B'}$$

Estas ecuaciones se puede representar así:

$$\begin{array}{ccc} (\bar{u})_{B'} & \xrightarrow{P} & (\bar{u})_B \\ (T(\bar{u}))_B & \xrightarrow{P^{-1}} & (T(\bar{u}))_{B'} \end{array} \tag{7.10}$$

Si presentamos en un solo gráfico (7.9) con (7.10)

$$\begin{array}{ccc} (\bar{u})_B & \xrightarrow{A} & (T(\bar{u}))_B \\ P\uparrow & & \downarrow P^{-1} \\ (\bar{u})_{B'} & \xrightarrow{A'} & (T(\bar{u}))_{B'} \end{array}$$

Del gráfico se deduce que hay dos caminos para obtener $(T(\bar{u}))_{B'}$ a partir de $(\bar{u})_{B'}$

Por el camino inferior:

$$A'(\bar{u})_{B'} = (T(\bar{u}))_{B'} \tag{7.11}$$

Por el camino mas largo: subir por el lado derecho, avanzar por la parte superior y bajar por el lado izquierdo. Es decir utilizando el principio de la composición de funciones:

$$(P^{-1}AP)(\bar{u})_{B'} = (T(\bar{u}))_{B'} \tag{7.12}$$

Reemplazando (7.11) en (7.12):

$$(P^{-1}AP)(\bar{u})_{B'} = A'(\bar{u})_{B'}$$

se concluye que:

$$P^{-1}AP = A'$$



Nota

1) Este teorema afirma que si dos matrices representan a un mismo operador lineal $T : V \to V$ con respecto a bases diferentes, entonces las matrices son semejantes.

2) En el teorema, P es la matriz de transición de la base B' a la base B donde B es la "base antigua" y B' es la "nueva base" de ese modo A es la matriz antigua y A' es la nueva matriz.

Ejemplo 7.41

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un operador lineal en $\mathbb{R}^2$ donde

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 5y \\ 2x + y \end{pmatrix}$$

y sean $B = \{e_1, e_2\}$ y $B' = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ donde

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1) Encontrar la matriz de T con respecto a la base B.

2) Utilizando el teorema anterior, encontrar la matriz de T con respecto a la base B'.

1) $A = \Big((T(e_1))_B \ (T(e_2))_B\Big)$

$$T(e_1) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (T(e_1))_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T(e_2) = T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (T(e_2))_B = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ es tal que } A(\bar{u})_B = (T(\bar{u}))_B, \ \forall \bar{u} \in \mathbb{R}^2$$

2) $A' = P^{-1}AP$ donde P es la matriz de transición de la base B' a la base B.
Es decir: $B' \xrightarrow{P} B$

$$P = \Big((\bar{v}_1)_B \ (\bar{v}_2)_B\Big)$$

$$(\bar{v}_1)_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad (\bar{v}_2)_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

donde $B \overset{P^{-1}}{\rightarrow} B'$

$$A' = P^{-1}AP = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -6 & -13 \\ 37 & 26 \end{pmatrix}$$

$$A'(\bar{u})_{B'} = (T(\bar{u}))_{B'};\ \forall \bar{u} \in \mathbb{R}^2$$

Ejemplo 7.42

Sea $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un operador lineal definido por

$$T(a + bi) = (a + b) + (-2a + 4b)i$$

Si $B = \{z_1, z_2\}$ es una base de $\mathbb{C}$ donde $z_1 = 1 + i, z_2 = 1 + 2i$

1) Encontrar la matriz de T con respecto a la base B.

2) Utilizando la matriz obtenida en 1) encontrar la matriz de T con respecto a la base $B' = \{z'_1, z'_2\}$ donde $z'_1 = 1, z'_2 = 1 + i$.

1) $A = \Big((T(z_1))_B\ \ (T(z_2))_B\Big)$ tal que $A(z)_B = (T(z))_B\ \forall z \in \mathbb{C}$

$$T(z_1) = T(1 + i) = 2 + 2i$$
$$T(z_2) = T(1 + 2i) = 3 + 6i$$

$$(T(z_1))_B = (2 + 2i)_B = r_1z_1 + r_2z_2 \Rightarrow (T(z_1))_B = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

$$2 + 2i = r_1(1 + i) + r_2(1 + 2i)$$
$$2 + 2i = (r_1 + r_2) + (r_1 + 2r_2)i$$

$$\left.\begin{aligned} r_1 + r_2 &= 2 \\ r_1 + 2r_2 &= 2 \end{aligned}\right\} \quad r_1 = 2,\ r_2 = 0 \Rightarrow (T(z_1))_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(T(z_2))_B = (3+6i)_B = t_1z_1 + t_2z_2 \Rightarrow (T(z_2))_B = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3+6i &= t_1(1+i) + t_2(1+2i) \\ 3+6i &= (t_1+t_2) + (t_1+2t_2)i \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} t_1 + t_2 = 3 \\ t_1 + 2t_2 = 6 \end{aligned}\right\} \quad t_1 = 0,\ t_2 = 3 \Rightarrow (T(z_2))_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2) $A' = P^{-1}AP$ donde P es la matriz de transición de la base B' a la base B.

$P = \left((z_1')_B \ (z_2')_B\right)$

$$(z_1')_B = (1)_B = k_1z_1 + k_2z_2 \Rightarrow (z_1')_B = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1 &= k_1(1+i) + k_2(1+2i) \\ 1 &= (k_1+k_2) + (k_1+2k_2)i \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} k_1 + k_2 = 1 \\ k_1 + 2k_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad k_1 = 2,\ k_2 = -1 \Rightarrow (z_1')_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(z_2')_B = (1+i)_B = m_1z_1 + m_2z_2 \Rightarrow (z_2')_B = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1+i &= m_1(1+i) + m_2(1+2i) \\ 1+i &= (m_1+m_2) + (m_1+2m_2)i \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} m_1 + m_2 = 1 \\ m_1 + 2m_2 = 1 \end{aligned}\right\} \quad m_1 = 1,\ m_2 = 0 \Rightarrow (z_2')_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Nota

1) En el ejemplo anterior observamos que la matriz de T con respecto a la base B es una matriz diagonal. Las matrices diagonales tienen propiedades útiles, por ejemplo:

   Si $D = \operatorname{diag}\begin{pmatrix} d_{11} & d_{22} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow D^k = \operatorname{diag}\begin{pmatrix} d_{11}^k & d_{22}^k & \cdots & d_{nn}^k \end{pmatrix}$ para $k \in \mathbb{Z}^+$.

   Para una matriz no diagonal se requiere un número mayor de cálculos para efectuar la misma operación.

2) La selección adecuada de la base puede conducirnos a una matriz diagonal del operador lineal.

Ejemplo 7.43

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un operador lineal definido por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x + 4y \\ x + 2y \end{pmatrix}$$

Encontrar la matriz de T con respecto a la base $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ donde

$$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} (T(\bar{u}_1))_B & (T(\bar{u}_2))_B \end{pmatrix}$$

$$T(\bar{u}_1) = T\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad T(\bar{u}_2) = T\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(T(\bar{u}_1))_B = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix}_B = a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2 \Rightarrow (T(\bar{u}_1))_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}24\\6\end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r}4a_1 - a_2 = 24\\ a_1 + a_2 = 6\end{array}\right\} \quad a_1 = 6,\ a_2 = 0 \Rightarrow (T(\bar{u}_1))_B = \begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$$

$$(T(\bar{u}_2))_B = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}_B = b_1\bar{u}_1 + b_2\bar{u}_2 \Rightarrow (T(\bar{u}_2))_B = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r}4b_1 - b_2 = -1\\ b_1 + b_2 = 1\end{array}\right\} \quad b_1 = 0,\ b_2 = 1 \Rightarrow (T(\bar{u}_2))_B = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix}6 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

es la matriz de T con respecto a la base B.

Nota

Surge la siguiente inquietud. Cómo elegir una base de modo que la matriz de T sea una matriz diagonal. La respuesta la tendremos en la Sección 7.14

7.13 Valores y vectores característicos de un operador lineal

Es posible definir valores y vectores característicos para operadores lineales, del mismo modo que para las matrices.

Para mayor comprensión de este tema, se recomienda revisar antes valores y vectores característicos de una matriz (Capítulo 8)

Definición 7.16

Se dice que un escalar λ es un **valor característico** (valor propio, autovalor o eigenvalor) de un operador lineal $T : V \to V$ si existe un vector $\bar{x} \neq \bar{0}$ en V tal

que $T(\bar{x}) = \lambda\bar{x}$.
El vector $\bar{x}$ es un **vector característico** (vector propio, autovector o eigenvector) **de** T **asociado a** λ.

$$T(\bar{x}) = \lambda\bar{x} \Rightarrow (T - \lambda I)\bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \bar{x} \in Ker(T - \lambda I)$$

$$(T - \lambda I) \text{ es un operador singular } \Rightarrow |T - \lambda I| = 0$$

Definición 7.17

El núcleo de $T - \lambda I$ se llama el **espacio característico de** T **correspondiente** a λ. Es decir:
La solución del sistema de ecuaciones $(T - \lambda I)\bar{x} = \bar{0}$ se llama **espacio característico de** T **correspondiente** a λ.

Teorema 7.13

Si $T : V \to V$ es un operador lineal donde V es un espacio vectorial de dimensión finita y si A es la matriz de T con respecto a cualquier base B entonces:

1) Los valores característicos de T son los valores característicos de la matriz A.

2) Un vector $\bar{x} \neq \bar{0}$ es un vector característico de T asociado a $\lambda \Leftrightarrow$ el vector de coordenadas $(\bar{x})_B$ es un vector característico de A asociado a λ.

Demostración. Sea el operador lineal $T : V \to V$, si A es la matriz de T con respecto a una base B entonces $A(\bar{x})_B = (T(\bar{x}))_B$

1) Si λ es un valor característico de A entonces

$$A(\bar{x})_B = \lambda(\bar{x})_B$$

$$(T(\bar{x}))_B = \lambda(\bar{x})_B = (\lambda\bar{x})_B$$

entonces

$$T(\bar{x}) = \lambda \bar{x}$$

entonces λ es un valor característico de T.

2) $T(\bar{x}) = \lambda \bar{x} \Longleftrightarrow A(\bar{x})_B = \lambda(\bar{x})_B$

($\Rightarrow$) D.q si $\bar{x}$ es un vector característico de T asociado a λ entonces $(\bar{x})_B$ es un vector característico de A asociado a λ.

Si $T(\bar{x}) = \lambda \bar{x}$ entonces

$$(T(\bar{x}))_B = (\lambda \bar{x})_B = \lambda(\bar{x})_B$$
$$A(\bar{x})_B = \lambda(\bar{x})_B$$

($\Leftarrow$) D.q si $(\bar{x})_B$ es un vector característico de A asociado a λ entonces $\bar{x}$ es un vector característico de T asociado a λ

Queda demostrado siguiendo en retroceso los pasos de la demostración anterior.



Nota

Si A es la matriz de T con respecto a una base B

1) Los valores característicos de A son valores característicos de T

2) Si $(\bar{x})_B$ es un vector característico de A asociado a λ entonces $\bar{x}$ es un vector característico de T asociado a λ.

Ejemplo 7.44

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un operador lineal definido por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x - 2y \\ 3x + 2y \end{pmatrix}$$

1) Encontrar los valores y vectores característicos de T

2) Determinar una base para el espacio característico de T correspondiente a λ.

Debemos encontrar A que es la matriz de T con respecto a una base. En este caso, no se da la base entonces elegimos la base estándar u ordinaria $B = \{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$

$$A = \Big((T(e_1))_B \;\; (T(e_2))_B\Big) = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ tal que } A(\bar{x})_B = (T(\bar{x}))_B \; \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^2$$

1) Los valores característicos de A son:

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(2-\lambda) + 6 = 0$$

$$\lambda^2 - 9\lambda + 20 = 0$$

$$(\lambda - 4)(\lambda - 5) = 0$$

$\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 5$ son valores característicos de T.

Si $\lambda_1 = 4$ entonces

$$(\bar{x}_1)_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \text{tal que } A(\bar{x}_1)_B = \lambda_1(\bar{x}_1)_B$$

$(A - \lambda_1 I)(\bar{x}_1)_B = \bar{0}$ es un SHEL

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad x_2 = t,\; x_1 = \frac{2}{3}x_2 = \frac{2}{3}t$$

$$(\bar{x}_1)_B = t\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (\bar{x}_1)_B = t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},\; t \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Si $\lambda_2 = 5$ entonces

$$(\bar{x}_2)_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \text{tal que } A(\bar{x}_2)_B = \lambda_2(\bar{x}_2)_B$$

$$(A - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad x_2 = r,\; x_1 = x_2 = r$$

$$(\bar{x}_2)_B = r\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$\{(\bar{x}_1)_B, (\bar{x}_2)_B\}$ son los vectores característicos de A.

$$(\bar{x}_1)_B = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x}_1 = 2e_1 + 3e_2 = 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

$$(\bar{x}_2)_B = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x}_2 = 1e_1 + 1e_2 = 1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ son los vectores característicos de T.

2)

$$\left\{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\}$$

es una base para el espacio característico de T correspondiente a $\lambda_1 = 4$

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

es una base para el espacio característico de T correspondiente a $\lambda_2 = 5$

Nota

En el siguiente ejemplo, a diferencia del ejemplo anterior se da la base.

Ejemplo 7.45

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un operador lineal definido por

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7x - 2y\\3x + 2y\end{pmatrix}$$

y sea $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ una base para $\mathbb{R}^2$ donde

$$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \bar{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

1) Encontrar los valores y vectores característicos de T

2) Determinar una base para el espacio característico de T correspondiente a λ.

Primero obtenemos A la matriz de T con respecto a la base B entonces

$$A = \left((T(\bar{u}_1))_B \ (T(\bar{u}_2))_B\right) \quad \text{tal que } A(\bar{u})_B = (T(\bar{u}))_B \ \forall \bar{u} \in \mathbb{R}^2$$

$$T(\bar{u}_1) = T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix} \qquad T(\bar{u}_2) = T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$$

$$(T(\bar{u}_1))_B = \begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}_B = r_1\bar{u}_1 + r_2\bar{u}_2 \Rightarrow (T(\bar{u}_1))_B = \begin{pmatrix}r_1\\r_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix} = r_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + r_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} r_1 + r_2 &= 7 \\ r_2 &= 3 \end{aligned}\right\} \quad r_2 = 3,\ r_1 = 4 \Rightarrow (T(\bar{u}_1))_B = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$$

$$(T(\bar{u}_2))_B = \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}_B = t_1\bar{u}_1 + t_2\bar{u}_2 \Rightarrow (T(\bar{u}_2))_B = \begin{pmatrix}t_1\\t_2\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} t_1 + t_2 &= 5 \\ t_2 &= 5 \end{aligned}\right\} \quad t_2 = 5,\ t_1 = 0 \Rightarrow (T(\bar{u}_2))_B = \begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix}4 & 0\\3 & 5\end{pmatrix} \quad \text{tal que } A(\bar{x})_B = (T(\bar{x}))_B$$

1) Los valores característicos de A son: $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 5$ por tanto son valores característicos de T

$$\lambda_1 = 4 \rightarrow (\bar{x}_1)_B = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \quad \text{tal que } A(\bar{x}_1)_B = \lambda_1(\bar{x}_1)_B,$$

$$(A - \lambda_1 I)(\bar{x}_1)_B = \bar{0}$$

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix}0 & 0\\3 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1/3\\0 & 0\end{pmatrix} \qquad x_2 = r,\ x_1 = -\frac{1}{3}x_2 = -\frac{1}{3}r$$

$$(\bar{x}_1)_B = r\begin{pmatrix} -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\bar{x}_1)_B = r\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad r \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$(\bar{x}_1)_B$ es el vector característico de A asociado a λ_1

2)

$$\lambda_2 = 5 \to (\bar{x}_2)_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{tal que } A(\bar{x}_2)_B = \lambda_2(\bar{x}_2)_B$$

$(A - \lambda_2 I)(\bar{x}_2)_B = \bar{0}$

$$(A - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 0, \ x_2 = t$$

$$(\bar{x}_2)_B = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$(\bar{x}_2)_B$ es el vector característico de A asociado a λ_2

$\{(\bar{x}_1)_B, (\bar{x}_2)_B\}$ son los vectores característicos de A.

$$(\bar{x}_1)_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x}_1 = -1\bar{u}_1 + 3\bar{u}_2 = -1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(\bar{x}_2)_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x}_2 = 0\bar{u}_1 + 1\bar{u}_2 = 0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ son los vectores característicos de T

3)

$$\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$$

es una base para el espacio característico de T correspondiente a $\lambda_1 = 4$

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

es una base para el espacio característico de T correspondiente a $\lambda_2 = 5$

Nota

En los Ejemplos 7.44 y 7.45 se observa que:

La matriz A que representa a T depende de la base y los vectores característicos de A dependen también de la base, mientras que los vectores característicos de T en cualquier base son los mismos.

Ejemplo 7.46

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un operador lineal definido por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 2y + z \\ x + 3y + z \\ x + 2y + 2z \end{pmatrix}$$

y sea $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ donde $\bar{u}_1 = (1,1,0)^T, \bar{u}_2 = (-1,0,0)^T, \bar{u}_3 = (-1,-2,1)^T$

1) Encontrar los valores y vectores característicos de T

2) Determinar una base para el espacio característico de T correspondiente a λ.

Primero hallamos la matriz de T con respecto a la base B

$$A = \Big((T(\bar{u}_1))_B \ (T(\bar{u}_2))_B \ (T(\bar{u}_3))_B\Big)$$

tal que $A(\bar{x})_B = (T(\bar{x}))_B \ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^3$

$$T(\bar{u}_1) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad T(\bar{u}_2) = T\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$T(\bar{u}_3) = T\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$(T(\bar{u}_1))_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}_B = a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2 + a_3\bar{u}_3 \Rightarrow (T(\bar{u}_1))_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} a_1 - a_2 - a_3 = 4 \\ a_1 \qquad - 2a_3 = 4 \\ a_3 = 3 \end{array}\right\} \quad a_1 = 10,\ a_2 = 3,\ a_3 = 3 \Rightarrow (T(\bar{u}_1))_B = \begin{pmatrix}10\\3\\3\end{pmatrix}$$

$$(T(\bar{u}_2))_B = \begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix}_B = b_1\bar{u}_1 + b_2\bar{u}_2 + b_3\bar{u}_3 \Rightarrow (T(\bar{u}_2))_B = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} b_1 - b_2 - b_3 = -2 \\ b_1 \qquad - 2b_3 = -1 \\ b_3 = -1 \end{array}\right\} \quad b_1 = -3,\ b_2 = 0,\ b_3 = -1 \Rightarrow (T(\bar{u}_2))_B = \begin{pmatrix}-3\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$(T(\bar{u}_3))_B = \begin{pmatrix}-5\\-6\\-3\end{pmatrix}_B = c_1\bar{u}_1 + c_2\bar{u}_2 + c_3\bar{u}_3 \Rightarrow (T(\bar{u}_3))_B = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} c_1 - c_2 - c_3 = -5 \\ c_1 \qquad - 2c_3 = -6 \\ c_3 = -3 \end{array}\right\} \quad c_1 = -12,\ c_2 = -4,\ c_3 = -3 \Rightarrow (T(\bar{u}_3))_B = \begin{pmatrix}-12\\-4\\-3\end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix}10 & -3 & -12\\3 & 0 & -4\\3 & -1 & -3\end{pmatrix}$$

es la matriz de T con respecto a la base B es decir $A(\bar{x})_B = (T(\bar{x}))_B$

1)

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix}10-\lambda & -3 & -12\\3 & -\lambda & -4\\3 & -1 & -3-\lambda\end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-5) = 0$$

$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$ son valores característicos de A y por tanto son valores característicos de T

$$\lambda_1 = 5 \to (\bar{x}_1)_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{tal que } A(\bar{x}_1)_B = \lambda_1(\bar{x}_1)_B$$

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -12 \\ 3 & -5 & -4 \\ 3 & -1 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{OEF}} \begin{pmatrix} 1 & -7 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(A - \lambda_1 I) = 2 < n$ entonces existe $n - 2 = 1$ incógnita arbitraria

$x_3 = t, x_2 = x_3 = t, x_1 = 7x_2 - 4x_3 = 3t$ entonces

$$(\bar{x}_1)_B = t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad t \neq 0$$

$\lambda_2 = 1 = \lambda_3$ entonces

$$(\bar{x})_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{tal que } A(\bar{x})_B = \lambda(\bar{x})_B$$

$$(A - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -12 \\ 3 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{OEF}} \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(A - \lambda_2 I) = 1 < n$ entonces existe $n - 1 = 2$ incógnitas arbitrarias

$$x_2 = r,\ x_3 = m,\ x_1 = \frac{1}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_3 = \frac{1}{3}r + \frac{4}{3}m$$

$$(\bar{x})_B = (\frac{1}{3}r + \frac{4}{3}m, r, m) \qquad r, m \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$(\bar{x})_B = r \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (\bar{x})_B = r \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(\bar{x}_2)_B = r\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R}-\{0\}, \qquad (\bar{x}_3)_B = m\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix} \quad m \in \mathbb{R}-\{0\}$$

$\{(\bar{x}_1)_B, (\bar{x}_2)_B, (\bar{x}_3)_B\}$ son vectores característicos de A.

$$(\bar{x}_1)_B = t\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x}_1 = 3\bar{u}_1 + 1\bar{u}_2 + 1\bar{u}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$(\bar{x}_2)_B = r\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x}_2 = 1\bar{u}_1 + 3\bar{u}_2 + 0\bar{u}_3 = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$(\bar{x}_3)_B = m\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x}_3 = 4\bar{u}_1 + 0\bar{u}_2 + 3\bar{u}_3 = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$ son vectores característicos de T.

2)

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

es una base para el espacio característico de T correspondiente a $\lambda = 5$

$$\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\right\}$$

es una base para el espacio característico de T correspondiente a $\lambda = 1$

Ejemplo 7.47

Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ un operador lineal definido por

$$T(a + bx + cx^2) = (3a - 2b) + (-2a + 3b)x + (5c)x^2$$

y sea la base $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ de $\mathbb{P}_2$ donde

$$p_1(x) = 1 - x^2, \quad p_2(x) = 1 + x, \quad p_3(x) = -1 + 2x + 4x^2$$

1) Encontrar los valores y vectores característicos de T.

2) Determinar una base para el espacio característico de T correspondiente a λ

Se requiere la matriz de T con respecto a la base B

$$A = \Big((T(p_1))_B \ (T(p_2))_B \ (T(p_3))_B\Big)$$

tal que $A(p(x))_B = (T(p(x)))_B \ \forall p(x) \in \mathbb{P}_2$

$$\begin{aligned}
T(p_1) &= T(1 - x^2) = T(1 + 0x - x^2) = 3 - 2x - 5x^2 \\
T(p_2) &= T(1 + x) = T(1 + x + 0x^2) = 1 + x \\
T(p_3) &= T(-1 + 2x + 4x^2) = -7 + 8x + 20x^2
\end{aligned}$$

$$(T(p_1))_B = (3 - 2x - 5x^2)_B = a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 \Rightarrow (T(p_1))_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
3 - 2x - 5x^2 &= a_1(1 - x^2) + a_2(1 + x) + a_3(-1 + 2x + 4x^2) \\
3 - 2x - 5x^2 &= (a_1 + a_2 - a_3) + (a_2 + 2a_3)x + (-a_1 + 4a_3)x^2
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
a_1 + a_2 - a_3 &= 3 \\
a_2 + 2a_3 &= -2 \\
-a_1 \qquad + 4a_3 &= -5
\end{aligned}\right\} \quad a_1 = 5, a_2 = -2, a_3 = 0 \Rightarrow (T(p_1))_B = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(T(p_2))_B = (1 + x)_B = b_1p_1 + b_2p_2 + b_3p_3 \Rightarrow (T(p_2))_B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}
b_1 + b_2 - b_3 &= 1 \\
b_2 + 2b_3 &= 1 \\
-b_1 \qquad + 4b_3 &= 0
\end{aligned}\right\} \quad b_1 = 0, b_2 = 1, b_3 = 0 \Rightarrow (T(p_2))_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(T(p_3))_B = (-7 + 8x + 20x^2)_B = c_1 p_1 + c_2 p_2 + c_3 p_3 \Rightarrow (T(p_3))_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} c_1 + c_2 - c_3 = -7 \\ c_2 + 2c_3 = 8 \\ -c_1 \qquad + 4c_3 = 20 \end{array}\right\} \quad c_1 = 0, c_2 = -2, c_3 = 5 \Rightarrow (T(p_3))_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{es tal que } A(p(x))_B = (T(p(x)))_B \ \forall p(x) \in \mathbb{P}_2$$

1)

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(1-\lambda)(5-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 5, \quad \lambda_3 = 5$$

son valores característicos de A y por tanto valores característicos de T.

$$\lambda_1 = 1 \to (\bar{x}_1)_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{tal que } A(\bar{x}_1)_B = \lambda_1(\bar{x}_1)_B$$

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{OEF}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(A - \lambda_1 I) = 2 < n$ entonces existe $n - 2 = 1$ incógnita arbitraria

$$x_3 = 0, \ x_2 = t, \ x_1 = 0 \Rightarrow (\bar{x}_1)_B = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \ t \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\lambda_2 = 5 = \lambda_3 \to (\bar{x})_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{tal que } A(\bar{x})_B = \lambda_2(\bar{x})_B$$

$$(A-\lambda_2 I)=\begin{pmatrix}0&0&0\\-2&-4&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{OEF}}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$r(A-\lambda_2 I)=1<n$ entonces existe $n-1=2$ incógnitas arbitrarias

$$x_3=r,\ x_2=m,\ x_1=-2x_2-x_3=-2m-r$$

$$(\bar{x})_B=\Big(-2m-r,m,r\Big)\qquad m,r\in\mathbb{R}-\{0\}$$

$$(\bar{x})_B=r\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$(\bar{x}_2)_B=r\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\quad r\in\mathbb{R}-\{0\},\qquad(\bar{x}_3)_B=m\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\quad m\in\mathbb{R}-\{0\}$$

$\{(\bar{x}_1)_B,(\bar{x}_2)_B,(\bar{x}_3)_B\}$ vectores característicos de A

$$(\bar{x}_1)_B=t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\bar{x}_1=0p_1(x)+1p_2(x)+0p_3(x)=1+x$$

$$\begin{aligned}(\bar{x}_2)_B=r\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\bar{x}_2&=-1p_1(x)+0p_2(x)+1p_3(x)\\&=-(1-x^2)+(-1+2x+4x^2)\\&=-2+2x+5x^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\bar{x}_3)_B=m\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\bar{x}_3&=-2p_1(x)+1p_2(x)+0p_3(x)\\&=-2(1-x^2)+(1+x)=-1+x+2x^2\end{aligned}$$

$\{\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3\}$ son los vectores característicos de T.

2) $\{1+x\}$ es una base para el espacio característico de T correspondiente a $\lambda = 1$

$\{-2+2x+5x^2, -1+x+2x^2\}$ es una base para el espacio característico de T correspondiente a $\lambda = 5$

Ejemplo 7.48

Sea $T : \mathbb{M}_{22} \to \mathbb{M}_{22}$ un operador lineal definido por

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{pmatrix}$$

y sea $B = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ una base de $\mathbb{M}_{22}$ donde

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Encontrar los valores y vectores característicos de T

2) Determinar una base para el espacio característico de T asociado a λ

Primero hallaremos la matriz de T con respecto a la base B

$$A = \Big((T(M_1))_B \ (T(M_2))_B \ (T(M_3))_B \ (T(M_4))_B\Big)$$

tal que $A(M)_B = (T(M))_B \ \forall M \in \mathbb{M}_{22}$

$$T(M_1) = T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad T(M_2) = T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(M_3) = T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad T(M_4) = T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(T(M_1))_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_B = a_1M_1 + a_2M_2 + a_3M_3 + a_4M_4$$

entonces

$$(T(M_1))_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 0 \\ a_2 \qquad + a_4 &= 1 \\ a_2 + a_3 \qquad &= 0 \\ a_3 \qquad &= 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow (T(M_1))_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(T(M_2))_B = T \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_B = b_1M_1 + b_2M_2 + b_3M_3 + b_4M_4$$

entonces

$$(T(M_2))_B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 + b_4 &= 2 \\ b_2 \qquad + b_4 &= 2 \\ b_2 + b_3 \qquad &= -1 \\ b_3 \qquad &= 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow (T(M_2))_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(T(M_3))_B = T \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}_B = c_1M_1 + c_2M_2 + c_3M_3 + c_4M_4$$

entonces

$$(T(M_3))_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 2 \\ c_2 \qquad + c_4 = 2 \\ c_2 + c_3 \qquad = -2 \\ c_3 \qquad = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow (T(M_3))_B = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$(T(M_4))_B = T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_B = d_1M_1 + d_2M_2 + d_3M_3 + d_4M_4$$

entonces

$$(T(M_4))_B = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 0 \\ d_2 \qquad + d_4 = 1 \\ d_2 + d_3 \qquad = 1 \\ d_3 \qquad = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow (T(M_4))_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

es la matriz de T con respecto a la base B tal que

$$A(M)_B = (T(M))_B;\ \forall M \in \mathbb{M}_{22}$$

1)

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 3 & 5 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda+2) = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -1, \quad \lambda_4 = -2$$

$$\lambda_1 = 1 = \lambda_2 \rightarrow (\bar{x})_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \text{tal que } A(\bar{x})_B = \lambda_1(\bar{x})_B$$

$$(A-\lambda_1 I) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{OEF}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(A-\lambda_1 I) = 2 < n$ entonces existen $n-2=2$ incógnitas arbitrarias

$$\begin{aligned} x_4 &= t, \\ x_3 &= r, \\ x_2 &= -\frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = -\frac{3}{2}r + \frac{1}{2}t \\ x_1 &= -3x_2 - 5x_3 + x_4 = -\frac{1}{2}r - \frac{1}{2}t \end{aligned}$$

$$(\bar{x})_B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}r - \frac{1}{2}t \\ -\frac{3}{2}r + \frac{1}{2}t \\ r \\ t \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r, t \neq 0$$

$$(\bar{x}_1)_B = r\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R} - \{0\} \qquad (\bar{x}_2)_B = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\lambda_3 = -1 \rightarrow (\bar{x}_3)_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \text{tal que } A(\bar{x}_3)_B = \lambda_3(\bar{x}_3)_B$$

$$(A - \lambda_3 I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{OEF}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(A - \lambda_3 I) = 3 < n$ entonces existe $n - 3 = 1$ incógnita arbitraria

$$x_4 = 0, \quad x_3 = -x_4 = 0, \quad x_2 = k \quad x_1 = -3x_2 - 5x_3 - x_4 = -3k$$

$$(\bar{x}_3)_B = k \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\lambda_4 = -2 \rightarrow (\bar{x}_4)_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \text{tal que } A(\bar{x}_4)_B = \lambda_4(\bar{x}_4)_B$$

$$(A - \lambda_4 I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{OEF}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(A - \lambda_4 I) = 3 < n$ entonces existe $n - 3 = 1$ incógnita arbitraria

$$x_4 = m, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 3x_3 - x_4 = -m, \quad x_1 = x_3 + x_4 = m$$

$$(\bar{x}_4)_B = m \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad m \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$\{(\bar{x}_1)_B, (\bar{x}_2)_B, (\bar{x}_3)_B, (\bar{x}_4)_B\}$ son vectores característicos de A.

$$(\bar{x}_1)_B = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x}_1 = (-1)M_1 - 3M_2 + 2M_3 + 0M_4 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(\bar{x}_2)_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x}_2 = (-1)M_1 + 1M_2 + 0M_3 + 2M_4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\bar{x}_3)_B = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x}_3 = (-3)M_1 + 1M_2 + 0M_3 + 0M_4 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\bar{x}_4)_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x}_4 = 1M_1 + (-1)M_2 + 0M_3 + 1M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4\}$ son los vectores característicos de T

2)

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base para el espacio característico de T correspondiente a $\lambda = 1$.

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base para el espacio característico de T correspondiente a $\lambda = -1$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base para el espacio característico de T correspondiente a $\lambda = -2$

Ejemplo 7.49

Sea $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un operador lineal definido por $T(a+bi) = 2a - (3b+a)i$ y sea $B = \{z_1, z_2\}$ una base de $\mathbb{C}$ donde $z_1 = 1+3i,\ z_2 = 5+16i$

1) Encontrar los valores y vectores característicos de T

2) Determinar una base para el espacio característico de T correspondiente a λ.

En primer término hallaremos la matriz de T con respecto a la base B

$$A = \Big((T(z_1))_B\ (T(z_2))_B\Big) \quad \text{tal que } A(z)_B = (T(z))_B,\ \forall z \in \mathbb{C}$$

$$T(z_1) = T(1+3i) = 2-10i, \qquad T(z_2) = T(5+16i) = 10-53i$$

$$(T(z_1))_B = (2-10i)_B = r_1 z_1 + r_2 z_2 \Rightarrow (T(z_1))_B = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2-10i &= r_1(1+3i) + r_2(5+16i) \\ 2-10i &= (r_1+5r_2) + (3r_1+16r_2)i \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} r_1 + 5r_2 &= 2 \\ 3r_1 + 16r_2 &= -10 \end{aligned}\right\} \quad r_1 = 82, \quad r_2 = -16 \Rightarrow (T(z_1))_B = \begin{pmatrix} 82 \\ -16 \end{pmatrix}$$

$$(T(z_2))_B = (10-53i)_B = t_1 z_1 + t_2 z_2 \Rightarrow (T(z_2))_B = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} t_1 + 5t_2 &= 10 \\ 3t_1 + 16t_2 &= -53 \end{aligned}\right\} \quad t_1 = 425,\ t_2 = -83 \Rightarrow (T(z_2))_B = \begin{pmatrix} 425 \\ -83 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 82 & 425 \\ -16 & -83 \end{pmatrix}$$

es la matriz de T con respecto a la base B

1)

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 82-\lambda & 425 \\ -16 & -83-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

entonces

$$(\lambda + 3)(\lambda - 2) = 0$$

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$ son valores característicos de A, por tanto son valores característicos de T.

$$\lambda_1 = 2 \rightarrow (\bar{x}_1)_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{tal que } A(\bar{x}_1)_B = \lambda_1(\bar{x}_1)_B$$

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 80 & 425 \\ -16 & -85 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{OEF}} \begin{pmatrix} 1 & 85/16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(A - \lambda_1 I) = 1 < n$ entonces existe $n - 1 = 1$ incógnita arbitraria

$$x_2 = k, \quad x_1 = -\frac{85}{16}x_2 = -\frac{85}{16}k \Rightarrow (\bar{x}_1)_B = k\begin{pmatrix} -\frac{85}{16} \\ 1 \end{pmatrix} \quad k \neq 0$$

$$(\bar{x}_1)_B = k\begin{pmatrix} -85 \\ 16 \end{pmatrix}; \quad k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\lambda_2 = -3 \rightarrow (\bar{x}_2)_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} 85 & 425 \\ -16 & -80 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{OEF}} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(A - \lambda_2 I) = 1 < n$ entonces existe $n - 1 = 1$ incógnita arbitraria

$$x_2 = m, \quad x_1 = -5x_2 = -5m \Rightarrow (\bar{x}_2)_B = m\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad m \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$\{(\bar{x}_1)_B, (\bar{x}_2)_B\}$ son los vectores característicos de A

$$(\bar{x}_1)_B = \begin{pmatrix} -85 \\ 16 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\bar{x}_1 = -85z_1 + 16z_2 = -85(1 + 3i) + 16(5 + 16i) = -5 + i$$

$$(\bar{x}_2)_B = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\bar{x}_2 = -5z_1 + 1z_2 = -5(1+3i) + (5+16i) = i$$

$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ son los vectores característicos de T.

2) $\{-5+i\}$ es una base para el espacio característico de T correspondiente a $\lambda_1 = 2$

$\{i\}$ es una base para el espacio característico de T correspondiente a $\lambda_2 = -3$

7.14 Diagonalización de un operador lineal

Necesitamos contestar la siguiente pregunta:

¿Dada una matriz cuadrada A de orden n, existe una matriz diagonal D tal que $P^{-1}AP = D$?

¿Si logramos determinar que esta matriz D existe, cómo se encuentra?

La respuesta se obtiene del estudio de los operadores lineales. Se sabe por la condición dada que D debe ser semejante a A. Pero las matrices A y D son semejantes si y solo si son representaciones matriciales del mismo operador lineal, por lo tanto afrontaremos el problema de la siguiente manera:

Definimos un operador lineal $T : V \to V$ y una base B para V tal que A es la matriz de T con respecto a la base B. Luego buscamos otra base B' de V tal que la matriz de T con respecto a la base B' es una matriz diagonal D. Si tenemos éxito de encontrar B' entonces $D = (T)_{B'}$ tiene la propiedad de que $P^{-1}AP = D$ donde P es la matriz de transición de la base B' a la base B. De este modo, el problema de encontrar una matriz diagonal D se convirtió en el problema de encontrar una base apropiada B' para un espacio vectorial V de modo que la matriz de T sea diagonal.

Teorema 7.14

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $T : V \to V$ un operador lineal definido sobre V. Si A y C son dos representaciones matriciales de T entonces A y C tienen el mismo polinomio característico

Demostración. Supongamos que A y C son matrices cuadradas de orden n y que B_1 y B_2 son bases para V tales que $A = (T)_{B_1}, C = (T)_{B_2}$. Por el Teorema 7.12 de la semejanza (Sección 7.12), $C = P^{-1}AP$ donde P es la matriz de transición de la base B_2 a la base B_1. Entonces

$$\begin{aligned}
|C - \lambda I| &= |P^{-1}AP - \lambda I| \\
&= |P^{-1}AP - \lambda P^{-1}IP| \\
&= |P^{-1}(AP - \lambda IP)| \\
&= |P^{-1}(A - \lambda I)P| \\
&= |P^{-1}||A - \lambda I||P| \\
&= |P^{-1}||P||A - \lambda I| \\
&= |P^{-1}P||A - \lambda I| = |A - \lambda I|
\end{aligned}$$

◇

Definición 7.18

El polinomio característico de un operador lineal $T : V \to V$ sobre un espacio vectorial V de dimensión n es el polinomio característico de cualquiera de las representaciones matriciales de T.

Nota

Si A y C son matrices semejantes, la demostración del teorema anterior muestra que tienen el mismo polinomio característico. El recíproco no es cierto como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.50

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tienen el mismo polinomio característico, veamos:

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2$$

$$|C - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2$$

Entonces para cualquier matriz cuadrada P de orden 2, no singular $P^{-1}AP \neq C$. Por tanto C no es semejante a A.

Nota

Un operador lineal, puede o no tener una representación matricial que sea una matriz diagonal. Entonces surge la pregunta: Cuándo un operador lineal tiene una representanción matricial diagonal. Si T es un operador lineal sobre un espacio vectorial de dimensión n y si T tiene n valores característicos diferentes demostraremos que T tiene una representación matricial diagonal.

El siguiente teorema es un paso para este resultado.

Teorema 7.15

Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son valores característicos diferentes de un operador lineal $T : V \to V$ y si $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ son vectores característicos de T asociados a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ respectivamente entonces $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$ es L.I.

Demostración. (Por el método del absurdo)
Supongamos que el conjunto de vectores característicos no nulos $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$ es L.D. Por el Teorema 6.9 (Capítulo 6, Sección 6.6)
Si $\bar{x}_j$ es el vector con coeficiente diferente de cero y de mayor subíndice entonces:

$$\bar{x}_j = a_1\bar{x}_1 + a_2\bar{x}_2 + \cdots + a_{j-1}\bar{x}_{j-1} \tag{7.13}$$

multiplicando ambos miembros por λ_j

$$\begin{aligned}\lambda_j\bar{x}_j &= \lambda_j(a_1\bar{x}_1 + a_2\bar{x}_2 + \cdots + a_{j-1}\bar{x}_{j-1})\\ T(\bar{x}_j) &= a_1(\lambda_j\bar{x}_1) + a_2(\lambda_j\bar{x}_2) + \cdots + a_{j-1}(\lambda_j\bar{x}_{j-1}) \qquad (7.14)\end{aligned}$$

Po otro lado

$$\begin{aligned}T(\bar{x}_j) &= T(a_1\bar{x}_1 + a_2\bar{x}_2 + \cdots + a_{j-1}\bar{x}_{j-1})\\ &= a_1T(\bar{x}_1) + a_2T(\bar{x}_2) + \cdots + a_{j-1}T(\bar{x}_{j-1})\\ &= a_1(\lambda_1\bar{x}_1) + a_2(\lambda_2\bar{x}_2) + \cdots + a_{j-1}(\lambda_{j-1}\bar{x}_{j-1}) \qquad (7.15)\end{aligned}$$

igualando (7.14) y (7.15)

$$a_1(\lambda_j - \lambda_1)\bar{x}_1 + a_2(\lambda_j - \lambda_2)\bar{x}_2 + \cdots + a_{j-1}(\lambda_j - \lambda_{j-1})\bar{x}_{j-1} = \bar{0}$$

$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{j-1}\}$ es L.I. entonces:

$$a_i(\lambda_j - \lambda_i) = 0 \text{ para } i = 1, 2, \ldots, j-1$$

sabemos que $\lambda_j - \lambda_i \neq 0 \; i = 1, 2, \ldots, j-1$
luego $a_i = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, j-1$.
En (7.13) entonces $\bar{x}_j = \bar{0}$ contradice el hecho de que $\bar{x}_j$ es un vector característico de T.
Por consiguiente $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_j\}$ es L.I. ◇

Teorema 7.16

Si $T : V \to V$ es un operador lineal sobre un espacio vectorial V de dimensión n y si T tiene n valores característicos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ distintos entonces la matriz de T es una matriz diagonal. Además si $B = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$ es un conjunto de vectores tales que $T(\bar{x}_i) = \lambda_i\bar{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ entonces B es una base para V y $(T)_B = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$

Demostración. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, n valores característicos distintos de T entonces existen vectores característicos no nulos $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ en V tales que $T(\bar{x}_i) = \lambda_i\bar{x}_i$; $i = 1, 2, \ldots, n$

Por el Teorema 7.15, el conjunto $B = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$ es L.I. Como V tiene dimensión n entonces $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$ es una base para V.
La matriz $(T)_B$ tiene como j-ésima columna

$$(T(\bar{x}_j))_B = \lambda_j e_j$$

luego $(T)_B = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ ◇

Nota

1) Cuando los valores característicos de un operador lineal T se repiten entonces la matriz de T puede o no ser una matriz diagonal.

2) La matriz de T será diagonal, si los vectores característicos asociados a valores característicos que se repiten son L.I.

Regla para diagonalizar un operador lineal

Que equivale a encontrar una nueva base de modo que la matriz de T en esa base sea diagonal.

1) Encontrar la matriz de T con respecto a una base B (base que puede o no ser dada) denotada por $(T)_B = A$

2) Encontrar los valores característicos λ_i de A, $i = 1, 2, \ldots, n$

3) Determinar los vectores característicos $(\bar{x}_i)_B$ asociados a cada valor característico $\lambda_i, i = 1, 2, \ldots, n$ de la matriz A.

4) Formar la matriz $P = ((\bar{x}_1)_B \ (\bar{x}_2)_B \ \ldots \ (\bar{x}_n)_B)$ tal que $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ donde P es la matriz de transición de la base B' a la base B.

5) La nueva base $B' = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$ que se forma con los vectores característicos de T determina que la representación matricial de T sea diagonal

Ejemplo 7.51

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un operador lineal definido por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x - 2y \\ 3x + 2y \end{pmatrix}$$

Encontrar una base B' de modo que la matriz de T sea diagonal.

Se requiere encontrar la matriz de T con respecto a una base, como no se de la base, elegimos la base estándar $B = \{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$

$$A = \Big((T(e_1))_B \ (T(e_2))_B\Big) = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

tal que $A(\bar{x})_B = (T(\bar{x}))_B$

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = (\lambda - 4)(\lambda - 5) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4, \ \lambda_2 = 5$$

$$\lambda_1 = 4 \Rightarrow (\bar{x}_1)_B = t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \ t \neq 0 \Rightarrow \bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 5 \Rightarrow (\bar{x}_1)_B = r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ r \neq 0 \Rightarrow \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si $B' = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ entonces $P : B' \to B$

$$P = \Big((\bar{x}_1)_B \ (\bar{x}_2)_B\Big) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{(-1)}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 12 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = A' \end{aligned}$$

Ejemplo 7.52

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un operador lineal definido por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x - 2y \\ 3x + 2y \end{pmatrix}$$

y sea $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ una base para $\mathbb{R}^2$ donde

$$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Encontrar una nueva base B' de modo que la matriz de T sea diagonal.
Debemos encontrar primero la matriz de T con respecto a la base B.

$$A = \Big((T(\bar{u}_1))_B \ (T(\bar{u}_2))_B\Big) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{tal que } A(\bar{x})_B = (T(\bar{x}))_B$$

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = (\lambda - 4)(\lambda - 5) \Rightarrow \lambda_1 = 5, \ \lambda_2 = 4$$

$$\lambda_1 = 5 \to (\bar{x}_1)_B = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \neq 0$$

$$\Rightarrow \bar{x}_1 = 0\bar{u}_1 + \bar{u}_2 = 0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 4 \to (\bar{x}_2)_B = r\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad r \neq 0$$

$$\Rightarrow \bar{x}_2 = -1\bar{u}_1 + 3\bar{u}_2 = -1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Si $B' = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ entonces $P : B' \to B$

$$P = \Big((\bar{x}_1)_B \ (\bar{x}_2)_B\Big) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 5 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = A'$$

Definición 7.19

Un operador lineal $T : V \to V$ donde V es un espacio de dimensión finita con producto interior euclidiano (producto punto) Se dice que es **diagonalizable ortogonalmente** si existe una base ortonormal tal que la matriz de T sea diagonal.

Nota

Si $T : V \to V$ es un operador lineal y B es una base ortonormal de V tal que la matriz de T con respecto a la base B es simétrica entonces T es diagonalizable ortogonalmente. Es decir, es posible encontrar una nueva base ortonormal B' de modo que $P^{-1}AP = P^TAP = D$ donde P es una matriz ortogonal ($P^{-1} = P^T$) y es la matriz de transición de la base B' a la base B.

Ejemplo 7.53

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un operador lineal definido por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x + 2y \\ 2x + 6y \end{pmatrix}$$

y sea $B = \{e_1, e_2\}$ la base estándar para $\mathbb{R}^2$ donde

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Encontrar una nueva base ortonormal de modo que la matriz de T sea diagonal.

Encontramos primero la matriz de T con respeto a la base B

$$A = \Big((T(u_1))_B \;\; (T(u_2))_B \Big)$$

$$T(e_1) = T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\2\end{pmatrix} \qquad T(e_2) = T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$$

$$(T(e_1))_B = \begin{pmatrix}9\\2\end{pmatrix}_B = 9e_1 + 2e_2 = \begin{pmatrix}9\\2\end{pmatrix}$$

$$(T(e_2))_B = \begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}_B = 2e_1 + 6e_2 = \begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix}9 & 2\\2 & 6\end{pmatrix}$$

A es simétrica y es la matriz de T con respecto a la base estándar B

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = (\lambda - 5)(\lambda - 10) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 10$$

son los valores característicos de A por tanto son los valores característicos de T

$$\lambda_1 = 5 \rightarrow (\bar{x}_1)_B = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \quad \text{tal que } A(\bar{x}_1)_B = \lambda_1(\bar{x}_1)_B$$

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix}4 & 2\\2 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{OEF} \begin{pmatrix}1 & 1/2\\0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0$$

$$(\bar{x}_1)_B = t\begin{pmatrix}-1/2\\1\end{pmatrix} \quad t \neq 0 \Rightarrow (\bar{x}_1)_B = t\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}, \ t \neq 0$$

$$\lambda_2 = 10 \rightarrow (\bar{x}_2)_B = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \quad \text{tal que } A(\bar{x}_2)_B = \lambda_2(\bar{x}_2)_B$$

$$(A - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix}-1 & 2\\2 & -4\end{pmatrix} \xrightarrow{OEF} \begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow x_1 - 2x_2 = 0$$

$$\Rightarrow (\bar{x}_2)_B = r\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \ r \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$\{(\bar{x}_1)_B, (\bar{x}_2)_B\}$ son vectores característicos de A.

$$(\bar{x}_1)_B = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x}_1 = -1e_1 + 2e_2 = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

$$(\bar{x}_2)_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x}_2 = 2e_1 + 1e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ son vectores característicos de T

Como A es una matriz simétrica entonces A es diagonalizable ortogonalmente

Por tanto la nueva base $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ debe ser ortonormal

$$P : B' \to B$$

$$P = \Big((\bar{x}_1)_B \; (\bar{x}_2)_B \Big) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Si P es una matriz ortogonal entonces $P^{-1}AP = P^T AP = A'$

$$P^T AP = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = A'$$

$$B' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es la nueva base ortonormal, de modo que la matriz de T es diagonal.

Ejemplo 7.54

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un operador lineal definido por

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x + 4y + 2z \\ 4x + 5y + 2z \\ 2x + 2y + 2z \end{pmatrix}$$

Encontrar una base de manera que la matriz de T sea una matriz diagonal.

Como no se da la base, elegimos la base estándar $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

es la matriz de T con respecto a la base estándar B.

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 10) = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = 10$$

$$\lambda_1 = 1 = \lambda_2 \rightarrow (\bar{x})_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ tal que } A(\bar{x})_B = \lambda_1(\bar{x})_B$$

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{OEF}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0$$

$$(\bar{x})_B = \begin{pmatrix} -r - \frac{1}{2}t \\ r \\ t \end{pmatrix} \qquad r, t \neq 0$$

$$(\bar{x})_B = r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(\bar{x}_1)_B = r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R} - \{0\}, \qquad (\bar{x}_2)_B = t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\lambda_3 = 10 \rightarrow (\bar{x}_3)_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ tal que } A(\bar{x}_3)_B = \lambda_3(\bar{x}_3)_B$$

$$(A - \lambda_3 I) = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{OEF}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$(\bar{x}_3)_B = m \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad m \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$\{(\bar{x}_1)_B, (\bar{x}_2)_B, (\bar{x}_3)_B\}$ son vectores característicos de A donde B es la base es-

tándar

$$(\bar{x}_1)_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\bar{x}_2)_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(\bar{x}_3)_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$ son vectores característicos de T

Como A es una matriz simétrica, entonces A es diagonalizable ortogonalmente. Por tanto la nueva base $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$ debe ser ortonormal

$$P : B' \to B$$

$$P = \Big((\bar{x}_1)_B \ (\bar{x}_2)_B \ (\bar{x}_3)_B\Big) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

donde P debe ser una matriz ortogonal tal que $P^{-1}AP = P^TAP = A'$

Aplicamos el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt

$$\bar{y}_1 = \bar{x}_1 = (-1, 1, 0)$$

$$\bar{y}_2 = \bar{x}_2 - \frac{\bar{x}_2 \cdot \bar{y}_1}{|\bar{y}_1|^2}\bar{y}_1 = (-1, 0, 2) - \frac{1}{2}(-1, 1, 0) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2)$$

$$\bar{y}_3 = \bar{x}_3 - \frac{\bar{x}_3 \cdot \bar{y}_1}{|\bar{y}_1|^2}\bar{y}_1 - \frac{\bar{x}_3 \cdot \bar{y}_2}{|\bar{y}_2|^2}\bar{y}_2$$

$$= (2, 2, 1) - 0 - 0 = (2, 2, 1)$$

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

es una matriz ortogonal, entonces

$$P^TAP = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = A'$$

$$B' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es la nueva base ortonormal de modo que la matriz de T es diagonal.

7.15 Ejercicios propuestos

1) Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una T.L. y sea A simétrica la matriz de T con respecto a la base estándar. Las raíces de la ecuación característica $P(\lambda) = 0$ son $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ y los vectores característicos asociados a cada λ_i son $\bar{x}_1 = (1,1,0,0)^T, \bar{x}_2 = (-1,0,1,0)^T, \bar{x}_3 = (1,0,0,1)^T, \bar{x}_4 = (-1,1,-1,1)$ respectivamente.

   (a) Si $P(A) = A^4 - 6A^2 + 8A - 3I = 0$. Calcular A.

   (b) Si $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$ donde

$$\bar{u}_1 = (1,0,0,0)^T, \qquad \bar{u}_2 = (1,1,0,0)^T$$
$$u_3 = (1,1,1,0)^T, \qquad \bar{u}_4 = (1,1,1,1)^T$$

   Encontrar $(T(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4))_B$

Rpta:

$$\text{(a)}\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{(b)}\quad (T(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4))_B = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un operador lineal definido por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y + 5z \\ -y + 5z \\ 4z \end{pmatrix}$$

y sea $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ donde $\bar{u}_1 = (1,1,0)^T, \bar{u}_2 = (1,2,0)^T, \bar{u}_3 = (4,1,1)^T$. Encontrar

(a) Los valores y vectores característicos de T.

(b) Una representación diagonal de T.

3) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un operador lineal. La matriz de T respecto a una base $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ es

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

donde

$$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Hallar una base para el espacio imagen y el espacio núcleo de T.

(b) Hallar una nueva base para que la matriz de T sea una matriz diagonal.

Rpta:

(a) $Img(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad Ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(b)
$$A(\bar{x})_B = (T(\bar{x}))_B$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 3 \quad \lambda_3 = -2$$

$$(\bar{x}_1)_B = t \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\bar{x}_2)_B = r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\bar{x}_3)_B = m \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B' = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$$

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \bar{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4) $\mathbb{P}_n = \{$espacio de los polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes reales$\}$

Sea $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ un operador lineal tal que

$$T(p(x)) = x^3 p^{(3)}(x) + x^2 p^{(2)}(x) + xp'(x) + p(x)$$

donde $p^{(i)}(x)$ es la i-ésima derivada de $p(x)$.

Sean $B = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ y $B' = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ bases de $\mathbb{P}_4$ donde

$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = 2 + x^3, \quad p_3(x) = 3 - x, \quad p_4(x) = 7x^2 - 8x$$
$$q_1(x) = 1, \quad q_2(x) = 1 + x, \quad q_3(x) = (1 + x)^2, \quad q_4(x) = (1 + x)^3$$

(a) Hallar la matriz de T con respecto a las bases B y B'

(b) Hallar la matriz de T con respecto a la base B

(c) Hallar una nueva base de modo que la matriz de T sea una matriz diagonal.

5) $V = \{$espacio de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

Sea $D : V \to V$ un operador lineal de derivación en V esto es $D(f) = \frac{df}{dt}$ y $B = \{f_1, f_2, f_3\}$ una base de V donde $f_1(t) = e^{3t}$, $f_2(t) = te^{3t}$, $f_3(t) = t^2e^{3t}$

$C = M + A$ donde

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y A es la representación matricial de D en la base B. Hallar los valores y vectores característicos de C^{-1}

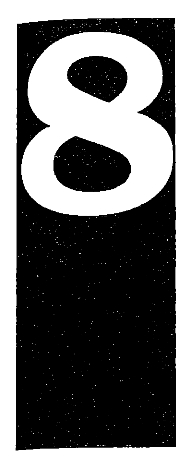
$$\textbf{Rpta:}\ A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad C = M + A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 5$$

$$\bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{x}_3 = m\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1}: \quad \lambda_1 = \frac{1}{3}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{3}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{5}$$

Capítulo



VALORES Y VECTORES CARACTERÍSTICOS DE UNA MATRIZ

Leonhard Euler[1] en su afán de buscar medios matemáticos para entender el movimiento planetario, desarrolló los conceptos importantes de valores característicos y vectores característicos. El trabajo de Euler implicaba la obtención de transformaciones lineales que especificaran un nuevo sistema de ejes coordenados. Dichos ejes le permitían describir, de manera más simple, las curvas que estaba estudiando.

Dada una matriz cuadrada A de orden n, el problema consiste en encontrar los escalares λ y los vectores $\bar{x} \neq \bar{0}$ correspondientes que satisfacen de manera simultánea la ecuación $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$.

La pregunta que surge de inmediato es la siguiente "existe un escalar λ que al multiplicar por el vector $\bar{x}$ se obtenga el mismo vector que resulta del producto $A\bar{x}$"

En efecto:

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x} \Rightarrow A\bar{x} - \lambda\bar{x} = \bar{0} \Rightarrow (A - \lambda I)\bar{x} = \bar{0}$$

Es decir:

$$(A - \lambda I)\bar{x} = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

[1]Leonhard Euler, matemático suizo (1707–1783)

es un sistema homogéneo de ecuaciones lineales.

$$(A - \lambda I)\bar{x} = \bar{0} \text{ tiene solución no trivial si y sólo si } |A - \lambda I| = 0$$

Definición 8.1

El desarrollo del determinante $|A - \lambda I|$ es un polinomio $P(\lambda)$ de grado n que se llama **polinomio característico de la matriz** A

Es decir:

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + \cdots + b_{n-1}\lambda^{n-1} + b_n\lambda^n$$

donde los **coeficientes invariantes** son:

$$b_n = (-1)^n$$

$$b_{n-1} = (-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$b_0 = |A|$$

Ejemplo 8.1

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -9 & -2 \end{pmatrix}.$$

Encontrar el polinomio característico de A.

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 2 \\ -9 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (7-\lambda)(-2-\lambda) + 18 = \lambda^2 - 5\lambda + 4$$

Verificamos los coeficientes invariantes:

$$b_n = (-1)^n = -1 \Rightarrow b_2 = (-1)^2 = 1$$

$$b_{n-1} = (-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n} a_{ii} \Rightarrow b_1 = (-1)^1(7-2) = -5$$

$$b_0 = |A| = 4$$

Ejemplo 8.2

Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Encontrar el polinomio característico de A.

$$\begin{aligned} P(\lambda) = |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 \end{aligned}$$

Verificamos los coeficientes invariantes

$$\begin{aligned} b_3 &= (-1)^3 = -1 \\ b_2 &= (-1)^2 \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 2 \\ b_0 &= |A| = -2 \end{aligned}$$

Definición 8.2

$P(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$ se llama **ecuación característica de la matriz** A

Nota

Para una matriz cuadrada de orden n, se obtiene una ecuación característica de grado n que contiene n raíces.

Definición 8.3

Las raíces de la ecuación característica se llaman **valores característicos** (valores propios, autovalores, eigenvalores) de la matriz A.

En el Ejemplo (8.1), la ecuación característica de A es:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$$

entonces $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$ son los valores característicos de A

En el Ejemplo (8.2), la ecuación característica de A es

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$
$$-(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

entonces $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1$ son los valores propios de A

Definición 8.4

El vector $\bar{x} \neq \bar{0}$ que satisface $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ se llama **vector característico** (vector propio, autovector, eigenvector) de A asociado a λ.

Teorema 8.1

El vector $\bar{x}$ no es único. Es decir: Si $\bar{x}$ es un vector propio de A asociado a λ entonces $\alpha\bar{x}, \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ es también un vector propio de A asociado a λ.

Demostración. Si $\bar{x}$ es un vector propio de A asociado a λ entonces $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$

$$A(\alpha\bar{x}) = \alpha(A\bar{x}) = \alpha(\lambda\bar{x}) = \lambda(\alpha\bar{x})$$

entonces $\alpha\bar{x}$ es también un vector propio de A asociado a λ donde $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$. ◇

Ejemplo 8.3

Para la matriz del Ejemplo 8.1, encontrar los vectores propios de A asociados a cada λ.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -9 & -2 \end{pmatrix}$$

se encontró que los valores propios de A son $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$

1) Para $\lambda_1 = 1$ vamos a encontrar el vector

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \bar{0}$$

tal que

$$A\bar{x}_1 = \lambda_1\bar{x}_1 \Rightarrow (A - \lambda_1 I)\bar{x}_1 = \bar{0}.$$

Resolviendo el SHEL

$$(A-\lambda_1 I)=\begin{pmatrix}7-1 & 2\\ -9 & -2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 2\\ -9 & -3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0\end{pmatrix}=E$$

$$\Longrightarrow x_1+\frac{1}{3}x_2=0$$

$$x_2=t,\ x_1=-\frac{1}{3}x_2=-\frac{1}{3}t$$

$$\bar{x}_1==t\begin{pmatrix}-1/3\\ 1\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix};\ \forall t\in\mathbb{R}-\{0\}$$

Comprobaremos que $A\bar{x}_1=\lambda_1\bar{x}_1$

$$A\bar{x}_1=\begin{pmatrix}7 & 2\\ -9 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}=\lambda_1\bar{x}_1$$

2) Para $\lambda_2=4$, vamos a encontrar el vector

$$\bar{x}_2=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\neq\bar{0}$$

tal que

$$A\bar{x}_2=\lambda_2\bar{x}_2\Rightarrow(A-\lambda_2 I)\bar{x}_2=\bar{0}$$

Resolviendo el SHEL

$$(A-\lambda_2 I)=\begin{pmatrix}7-4 & 2\\ -9 & -2-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3 & 2\\ -9 & -6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2/3\\ 0 & 0\end{pmatrix}=E$$

$$\Longrightarrow x_1+\frac{2}{3}x_2=0$$

$$x_2=r,\ x_1=-\frac{2}{3}x_2=-\frac{2}{3}r$$

$$\bar{x}_2=r\begin{pmatrix}-2/3\\ 1\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix};\ \forall r\in\mathbb{R}-\{0\}$$

Comprobando que $A\bar{x}_2=\lambda_2\bar{x}_2$

$$A\bar{x}_2=\begin{pmatrix}7 & 2\\ -9 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\ 12\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix}=\lambda_2\bar{x}_2$$

Ejemplo 8.4

Para la matriz del Ejemplo 8.2, encontrar los valores y vectores propios de A asociados a λ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

se encontró que los valores propios de A son: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1$

1) $\lambda_1 = 1$ entonces

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{tal que} \quad (A - \lambda_1 I)\bar{x}_1 = \bar{0}$$

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E$$

$$x_3 = t,\ x_2 = 2x_3 = 2t,\ x_1 = x_2 + x_3 = 3t \Rightarrow \bar{x}_1 = t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R} - \{0\}$$

2) $\lambda_2 = 2$ entonces

$$\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{tal que} \quad (A - \lambda_2 I)\bar{x}_2 = \bar{0}$$

$$(A - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E$$

$$x_3 = r,\ x_2 = 3x_3 = 3r,\ x_1 = x_2 - 2x_3 = r \Rightarrow \bar{x}_2 = r \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad r \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3) $\lambda_3 = -1$ entonces

$$\bar{x}_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{tal que} \quad (A - \lambda_3 I)\bar{x}_3 = \bar{0}$$

$$(A - \lambda_3 I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E$$

$$x_3 = m, \ x_2 = 0, \ x_1 = 3x_2 + x_3 = m \Rightarrow \bar{x}_3 = m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad m \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Como en el Ejemplo 8.3 se puede comprobar que $A\bar{x}_i = \lambda_i \bar{x}_i$ para $i = 1, 2, 3$

Ejemplo 8.5

Si

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Encontrar los valores y vectores propios de A

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ -5 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \pm i$$

$$\lambda_1 = 1 + i, \ \lambda_2 = 1 - i$$

1) $\lambda_1 = 1 + i$ entonces

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{tal que} \quad (A - \lambda_1 I)\bar{x}_1 = \bar{0}$$

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 2 - i & 1 \\ -5 & -2 - i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 - i & 1 \\ -5 & -2 - i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = t, \ x_2 = (-2 + i)t \Rightarrow \bar{x}_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 + i \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R} - \{0\}$$

2) $\lambda_2 = 1 - i$ entonces

$$\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{tal que} \quad (A - \lambda_2 I)\bar{x}_2 = \bar{0}$$

$$(A - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} 2+i & 1 \\ -5 & -2+i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2+i & 1 \\ -5 & -2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $x_1 = r$ entonces

$$x_2 = -(2+i)r \Rightarrow \bar{x}_2 = r \begin{pmatrix} 1 \\ -2-i \end{pmatrix} \qquad r \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Comprobando

$$A\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i \\ -3-i \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \bar{x}_1 = (1+i) \begin{pmatrix} 1 \\ -2+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i \\ -3-i \end{pmatrix}$$

$$A\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-i \\ -3+i \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 \bar{x}_2 = (1-i) \begin{pmatrix} 1 \\ -2-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-i \\ -3+i \end{pmatrix}$$

Nota

1) Este ejemplo pone en evidencia el hecho de que una matriz real puede tener valores y vectores propios complejos.

2) También se puede observar que λ_2 es el complejo conjugado de λ_1 ($\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$) y que las componentes de $\bar{x}_2$ son los conjugados complejos de $\bar{x}_1$ ($\bar{x}_2 = \overline{\bar{x}_1}$). Este resultado no es una casualidad.

Teorema 8.2

Sea A una matriz real cuadrada de orden n. Si λ es un valor propio complejo de A con vector propio $\bar{x}$ entonces $\bar{\lambda}$ es un valor propio de A con vector propio $\bar{\bar{x}}$

Demostración. Si $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ donde λ es un número complejo y $\bar{x}$ tiene componentes complejas.

$$\left.\begin{array}{l} \overline{A\bar{x}} = A\bar{\bar{x}} \\ \overline{A\bar{x}} = \overline{\lambda\bar{x}} = \bar{\lambda}\bar{\bar{x}} \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{\bar{x}} = \overline{\lambda}\bar{\bar{x}}$$



Ejemplo 8.6

Sea la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Encontrar los valores y vectores propios de A.

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \pm 3i$$

$\lambda_1 = 2 + 3i$ y $\lambda_2 = 2 - 3i$

1) $\lambda_1 = 2 + 3i$ entonces

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{tal que} \quad A\bar{x}_1 = \lambda_1\bar{x}_1$$

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 1-3i & 2 \\ -5 & -1-3i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+3i}{5} \\ 1-3i & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+3i}{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E$$

$$x_2 = t, \quad x_1 = -(\frac{1+3i}{5})x_2 = -(\frac{1+3i}{5})t \Rightarrow \bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} -\frac{1}{5}(1+3i) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} -1-3i \\ 5 \end{pmatrix}; \quad t \in \mathbb{R} - \{0\}$$

2) $\lambda_2 = 2 - 3i$ entonces

$$\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{tal que } A\bar{x}_2 = \lambda_2\bar{x}_2$$

$$(A-\lambda_2 I)=\begin{pmatrix}1+3i & 2\\ -5 & -1+3i\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & \frac{1-3i}{5}\\ 1+3i & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & \frac{1-3i}{5}\\ 0 & 0\end{pmatrix}=E$$

$$x_2=r,\ x_1=(\frac{-1+3i}{5})x_2=(\frac{-1+3i}{5})r\Rightarrow \bar{x}_2=r\begin{pmatrix}\frac{-1+3i}{5}\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_2=r\begin{pmatrix}-1+3i\\ 5\end{pmatrix}\qquad r\in\mathbb{R}-\{0\}$$

En conclusión

$$\lambda_1=2+3i \quad \text{y} \quad \bar{x}_1=\begin{pmatrix}-1-3i\\ 5\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=2-3i \quad \text{y} \quad \bar{x}_2=\begin{pmatrix}-1+3i\\ 5\end{pmatrix}$$

y observamos que $\lambda_2=\overline{\lambda_1}$ y $\bar{x}_2=\overline{\bar{x}_1}$

Nota

1) En lo que sigue, se trabajarán con matrices reales y cuyos valores y vectores propios sean reales.

2) En los ejemplos que hemos estudiado hasta ahora las matrices tienen valores propios diferentes, luego estudiaremos matrices cuyos valores propios se repiten, es decir, cuyos valores propios tienen multiplicidad.

Teorema 8.3

Si λ es un valor propio de multiplicidad $r\leq n$ de una matriz A de orden n entonces existen a lo más $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_r$ vectores propios L.I. correspondientes a λ y $\bar{x}=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\bar{x}_i$ es también un vector propio de A asociado a λ.

Ejemplo 8.7

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

encontrar los valores y vectores propios de A.

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)^2(\lambda-6) = 0$$

$$\lambda_1 = 6, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 2$$

1) $\lambda_1 = 6$ entonces

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{tal que } A\bar{x}_1 = \lambda_1 \bar{x}_1$$

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E$$

$$x_3 = t,\ x_2 = 2x_3 = 2t,\ x_1 = -x_2 + 3x_3 = t \Rightarrow x_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R} - \{0\}$$

2) $\lambda_2 = 2$ entonces

$$\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{tal que } A\bar{x}_2 = \lambda_2 \bar{x}_2$$

$$(A - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E$$

$r(A - \lambda_2 I) = 1 < n$ entonces $\exists n - 1 = 2$ incógnitas arbitrarias

$$x_2 = r, \quad x_3 = m, \quad x_1 = -x_2 - x_3 = -r - m \tag{8.1}$$

Si elegimos $x_2 = r, x_3 = 0$ entonces $x_1 = -r$

$$\bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ r \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3) Para $\lambda_3 = 2$ tenemos la misma matriz $A - \lambda_3 I = A - \lambda_2 I$, entonces si elegimos $x_2 = 0,\ x_3 = m$ entonces $x_1 = -m$

$$\bar{x}_3 = m\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ m \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Nota

Usando el hecho de que cualquier combinación lineal $a\bar{x}_2 + b\bar{x}_3$ es también un vector propio de A asociado a $\lambda_2 = 2$ entonces observando la Ecuación (8.1) se tiene que el conjunto solución del sistema $(A - \lambda_2 I)\bar{x}_2 = \bar{0}$ es:

$$S = \{-r - m, r, m\},\ r, m \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Luego

$$\bar{x} = r\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; r, m \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\bar{x} = r\bar{x}_2 + m\bar{x}_3$$

es un vector propio de A asociado a $\lambda = 2$ y

$$\bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ r \in \mathbb{R} - \{0\}, \qquad \bar{x}_3 = m\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ m \in \mathbb{R} - \{0\}$$

son los vectores propios asociados a $\lambda = 2$.

Ejemplo 8.8

Si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

encontrar los valores y vectores propios de A.

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^3 = 0$$

entonces

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

1) $\lambda_1 = -1$ entonces

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{tal que } A\bar{x}_1 = \lambda_1 \bar{x}_1$$

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E$$

$r(A - \lambda_1 I) = 2$ entonces $\exists n - 2 = 1$ incógnita arbitraria

$$x_3 = t, \quad x_2 = -x_3 = -t, \quad x_1 = -x_3 = -t, \quad \bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}-\{0\}$$

2) $\lambda_2 = -1$ entonces

$$\bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; r \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3) $\lambda_3 = -1$ entonces

$$\bar{x}_3 = m\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; m \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Propiedades

1) A y A^T tienen los mismos valores propios.

2) Si un valor propio de A es cero entonces $|A| = 0$.

3) Si λ es un valor propio de A entonces $r\lambda$ es un valor propio de rA.

4) Si λ es un valor propio de A entonces $\lambda \pm r$ es un valor propio de $A \pm rI$.

5) Si λ es un valor propio de A entonces λ^m es un valor propio de $A^m, m \in \mathbb{Z}^+$.

6) Si λ es un valor propio de A entonces $f(\lambda)$ es un valor propio de $f(A)$.

7) Si $\lambda \neq 0$ es un valor propio de A entonces $\frac{1}{\lambda}$ es un valor propio de A^{-1}.

8) Los valores propios de una matriz ortogonal son ± 1.

9) Los n valores propios de una matriz diagonal son los n elementos de la diagonal.

10) Si A es una matriz triangular (superior o inferior) los valores propios de A son los elementos de la diagonal.

11) La suma de los valores propios de A es igual a la traza de A.

Demostración. 1) $|A - \lambda I| = |(A - \lambda I)^T| = |A^T - \lambda I|$

A y A^T tienen el mismo polinomio característico, por tanto A y A^T tienen los mismos valores propios.

2) Si $\lambda = 0$ entonces

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = |A - 0I| = |A| = 0$$

3) Si λ es un valor propio de A entonces $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ donde $\bar{x}$ es un vector propio de A asociado a λ.

$$(rA)\bar{x} = r(A\bar{x}) = r(\lambda\bar{x}) = (r\lambda)\bar{x}$$

entonces $r\lambda$ es un valor propio de rA, donde $r \in \mathbb{R}$.

4) Si λ es un valor propio de A entonces $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ donde $\bar{x}$ es un vector propio de A asociado a λ.

$$\begin{aligned}(A \pm rI)\bar{x} &= A\bar{x} \pm r\bar{x} \\ &= \lambda x \pm r\bar{x} \\ &= (\lambda \pm r)\bar{x}\end{aligned}$$

5) Si λ es un valor propio de A entonces $A^m\bar{x} = \lambda^m\bar{x}$ donde $\bar{x}$ es un vector propio de A asociado a λ y $m \in \mathbb{Z}^+$.

Demostramos usando inducción matemática:

$$\text{Si } m = 1 \Rightarrow A\bar{x} = \lambda\bar{x} \quad \text{(obvio)}$$
$$m = 2 \Rightarrow A^2\bar{x} = (AA)\bar{x} = A(A\bar{x}) = A(\lambda\bar{x}) = \lambda(A\bar{x}) = \lambda^2\bar{x}$$

Suponiendo que se cumple para $m = h$

$$A^h\bar{x} = \lambda^h\bar{x}$$

D. q. se cumple para $m = h + 1$

$$\begin{aligned}(A^{h+1})\bar{x} = (A^hA)\bar{x} &= A^h(A\bar{x}) \\ &= A^h(\lambda\bar{x}) = \lambda(A^h\bar{x}) \\ &= \lambda(\lambda^h\bar{x}) = \lambda^{h+1}\bar{x}\end{aligned}$$

Queda demostrado que $A^m\bar{x} = \lambda^m\bar{x};\ \forall m \in \mathbb{Z}^+$

6) Si λ es un valor propio de A entonces $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$, donde $\bar{x}$ es un vector propio de A asociado a λ.

Luego se cumple que $f(A)\bar{x} = f(\lambda)\bar{x}$, es decir que $f(\lambda)$ es un valor propio de $f(A)$ y $\bar{x}$ es un vector propio de $f(A)$ asociado a $f(\lambda)$.

7) Si $\lambda \neq 0$ es un valor propio de A entonces $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ donde $\bar{x}$ es un vector propio de A asociado a λ

$$A^{-1}(A\bar{x}) = A^{-1}(\lambda\bar{x})$$

$$(A^{-1}A)\bar{x} = \lambda(A^{-1}\bar{x})$$

entonces

$$\bar{x} = \lambda(A^{-1}\bar{x}) \Rightarrow A^{-1}\bar{x} = \frac{1}{\lambda}\bar{x}$$

entonces $\frac{1}{\lambda}$ $(\lambda \neq 0)$ es un valor propio de A^{-1}.

8) Si A es una matriz ortogonal, es decir

$$A^T = A^{-1} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

9) Si $D = \text{diag}(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn})$ es una matriz diagonal de orden n entonces:

$$P(\lambda) = |D - \lambda I| = (d_{11} - \lambda)(d_{22} - \lambda)\cdots(d_{nn} - \lambda) = 0$$

luego $\lambda_1 = d_{11},\ \lambda_2 = d_{22}, \ldots, \lambda_n = d_{nn}$.

Por tanto los valores propios de una matriz diagonal coinciden con los elementos de la diagonal principal de D.

10) Si A es una matriz triangular (superior o inferior)

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\cdots(a_{nn} - \lambda) = 0$$

entonces $\lambda_1 = a_{11},\ \lambda_2 = a_{22}, \ldots, \lambda_n = a_{nn}$ son valores propios de A coinciden con los elementos de la diagonal principal de A.

11) Si A es una matriz cuadrada de orden n demostrar que

$$\text{Traza}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Sea $A = (a_{ij})_n$ entonces

$$\text{Traza}(a_{ij})_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = (-1)^n |\lambda I - A| \tag{8.2}$$
$$= (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) \tag{8.3}$$

el coeficiente invariante de λ^{n-1} en $P(\lambda)$ es

$$b_{n-1} = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

el coeficiente de λ^{n-1} en (8.3) es

$$(-1)^{n+1} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Por tanto:

$$(-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = (-1)^{n+1} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

es decir:

$$\text{Traza}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$



Nota

1) Estas propiedades son sumamente útiles en la solución de problemas relacionados con los valores y vectores propios de una matriz. A modo de verificación la propiedad 11 se usa en todo problema de este tipo.

2) En todas las propiedades se observa que los vectores propios son los mismos.

Ejemplo 8.9

Si

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -9 & -2 \end{pmatrix}$$

Encontrar los valores y vectores propios de $f(A) = A^3 - 2A^2 + A - 3I$

En el Ejemplo 8.3 se encontró que los valores y vectores propios de A son:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 4, \quad \bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \; t \neq 0, \quad \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; r \neq 0$$

Por la Propiedad 11

$$\text{Traza}(A) = \sum_{i=1}^{2} a_{ii} = (7) + (-2) = 5, \; \sum_{i=1}^{2} \lambda_i = 1 + 4 = 5$$

Por la Propiedad 6: Los valores propios de $f(A)$ son $f(\lambda)$

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow f(\lambda_1) = f(1) = (1)^3 - 2(1)^2 + 1 - 3(1) = -3$$
$$\lambda_2 = 4 \Rightarrow f(\lambda_2) = f(4) = (4)^3 - 2(4)^2 + 4 - 3(1) = 33$$

los vectores propios de $f(A)$ son los vectores propios de A.
Comprobando:

$$f(A) = \begin{pmatrix} 69 & 24 \\ -108 & -39 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 23 & 8 \\ -36 & -13 \end{pmatrix}$$

$f(\lambda_1) = -3$ entonces

$$f(A)\bar{x}_1 = f(\lambda_1)\bar{x}_1$$

$$f(A)\bar{x}_1 = 3\begin{pmatrix} 23 & 8 \\ -36 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = f(\lambda_1)\bar{x}_1$$

$f(\lambda_2) = 33$ entonces

$$f(A)\bar{x}_2 = f(\lambda_2)\bar{x}_2$$

$$f(A)\bar{x}_2 = 3\begin{pmatrix} 23 & 8 \\ -36 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -22 \\ 33 \end{pmatrix} = 33\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = f(\lambda_2)\bar{x}_2$$

Ejemplo 8.10

Si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Encontrar los valores y vectores propios de $f(A) = A^2 - 7A^{-1} + 2I$

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - 15 = 0$$

entonces $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 7$

Por la Propiedad 11:

$$\sum_{i=1}^{2} a_{ii} = 6, \qquad \sum_{i=1}^{2} \lambda_i = 6.$$

Entonces

$\lambda_1 = -1$

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{tal que } (A - \lambda_1 I)\bar{x}_1 = \bar{0}$$

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E$$

$$x_2 = t,\ x_1 = -x_2 = t \Rightarrow x_1 = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

$\lambda_2 = 7$

$$\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{tal que} \quad (A - \lambda_2 I)\bar{x}_2 = \bar{0}$$

$$(A - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3/5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E$$

$$x_2 = r, \quad x_1 = \frac{3}{5}x_2 = \frac{3}{5}r \Rightarrow \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} 3/5 \\ 1 \end{pmatrix},\ \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix},\ r \neq 0$$

Por la Proposición 6 los valores propios de $f(A)$ son $f(\lambda)$

$$\lambda_1 = -1 \Rightarrow f(\lambda_1) = (-1)^2 - 7(\frac{1}{-1}) + 2(1) = 1 + 7 + 2 = 10$$

$$\lambda_2 = 7 \Rightarrow f(\lambda_2) = 7^2 - 7(\frac{1}{7}) + 2(1) = 49 - 1 + 2 = 50$$

Los vectores propios de $f(A)$ son los vectores propios de A.
Comprobando:

$$\begin{aligned} f(A) &= A^2 - 7A^{-1} + 2I \\ &= \begin{pmatrix} 19 & 18 \\ 30 & 31 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 15 \\ 25 & 35 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$f(\lambda_1) = 10$ entonces

$$\begin{aligned} f(A)\bar{x}_1 &= f(\lambda_1)\bar{x}_1 \\ f(A)\bar{x}_1 &= \begin{pmatrix} 25 & 15 \\ 25 & 35 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = f(\lambda_1)\bar{x}_1 \end{aligned}$$

$f(\lambda_2) = 50$ entonces

$$\begin{aligned} f(A)\bar{x}_2 &= f(\lambda_2)\bar{x}_2 \\ f(A)\bar{x}_2 &= \begin{pmatrix} 25 & 15 \\ 25 & 35 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 250 \end{pmatrix} = 50 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = f(\lambda_2)\bar{x}_2 \end{aligned}$$

Ejemplo 8.11

Si

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

encontrar los valores y vectores propios de $5A^{-1}$.
En el Ejemplo 8.7, los valores y vectores propios de A son:

$$\lambda_1 = 6, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 2$$

$$\bar{x}_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \neq 0, \quad \bar{x}_2 = r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ r \neq 0, \quad \bar{x}_3 = m \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ m \neq 0$$

Por la Propiedad 11:

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ii} = 10, \quad \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 10.$$

Entonces por la Propiedad 7, los valores propios de A^{-1} son

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{\lambda_3} = \frac{1}{2}$$

y los valores propios de $5A^{-1}$ son:

$$\lambda_1' = \frac{5}{6}, \quad \lambda_2' = \frac{5}{2}, \quad \lambda_3' = \frac{5}{2}$$

y los vectores propios de $5A^{-1}$ son los mismos vectores propios de A, es decir:

$$\bar{x}_1 = t\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \; t \neq 0, \quad \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \; r \neq 0, \quad \bar{x}_3 = m\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \; m \neq 0$$

Comprobando solo para verificar resultados:

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix}5 & -1 & -1\\ -2 & 4 & -2\\ -1 & -1 & 5\end{pmatrix}$$

$\lambda_1' = \frac{5}{6}$ entonces

$$(5A^{-1})\bar{x}_1 = \lambda_1'\bar{x}_1$$

$$(5A^{-1})\bar{x}_1 = \frac{5}{12}\begin{pmatrix}5 & -1 & -1\\ -2 & 4 & -2\\ -1 & -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \frac{5}{12}\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix} = \frac{5}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \frac{5}{6}\bar{x}_1$$

$\lambda_2' = \frac{5}{2}$ entonces

$$(5A^{-1})\bar{x}_2 = \lambda_2'\bar{x}_2$$

$$(5A^{-1})\bar{x}_2 = \frac{5}{12}\begin{pmatrix}5 & -1 & -1\\ -2 & 4 & -2\\ -1 & -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{5}{12}\begin{pmatrix}-6\\6\\0\end{pmatrix} = \frac{5}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{5}{2}\bar{x}_2$$

$\lambda_3' = \frac{5}{2}$ entonces

$$(5A^{-1})\bar{x}_3 = \lambda_3'\bar{x}_3$$

$$(5A^{-1})\bar{x}_3 = \frac{5}{12}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{5}{12}\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}\bar{x}_3$$

Ejemplo 8.12

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & a & -a \\ -b & 5 & b \\ a & a & -b \end{pmatrix}$$

donde $a > 0, b \in \mathbb{R}$ y los valores propios de A satisfacen la ecuación:

$$\lambda^3 - 11\lambda^2 + 39\lambda - 45 = 0.$$

Encontrar los valores y vectores propios de A.
Si

$$\lambda^3 - 11\lambda^2 + 39\lambda - 45 = 0.$$

entonces

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 39\lambda + 45 = 0$$

es el polinomio característico de A donde los coeficientes invariantes son:
Para $n = 3$

$$b_n = b_3 = (-1)^3 = -1$$

$$b_{n-1} = b_2 = (-1)^2\sum_{i=1}^{3} a_{ii} = 9 - b = 11 \Rightarrow b = -2$$

$$b_0 = |A| = 45$$

$$|A| = 4(10 + 2a) - a(4 + 2a) - a(2a - 5a) = 45$$

entonces

$$a^2 + 4a - 5 = 0$$

$$(a-1)(a+5)=0$$

entonces

$$\begin{cases} a = 1 > 0 \\ a = -5 \end{cases}$$

luego $a = 1$, por tanto

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 39\lambda + 45 = 0$$

$$(\lambda-3)^2(\lambda-5) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 5$$

son los valores propios de A. $\lambda_1 = 3 = \lambda_2$ entonces

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{tal que} \quad (A - \lambda_1 I)\bar{x} = \bar{0}$$

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E \Rightarrow x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$x_2 = t,\ x_3 = r,\ x_1 = -x_2 + x_3 = -t + r$$

entonces

$$S = \{-t + r, t, r\},\ r, t \in \mathbb{R}$$

$$\bar{x} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \neq 0 \text{ y } \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r \neq 0$$

$\lambda_3 = 5$ entonces

$$\bar{x}_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{tal que} \quad (A - \lambda_3 I)\bar{x}_3 = \bar{0}$$

$$(A-\lambda_3 I)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & -2\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=E$$

$$x_3=m,\ x_2=2x_3=2m,\ x_1=x_2-x_3=2m-m=m$$

entonces

$$\bar{x}_3=m\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix},m\neq 0$$

8.1 Ejercicios propuestos

1) Si

$$A=\begin{pmatrix}\cdot & -2 & c\\ a & a & a\\ a & c & -a\end{pmatrix}$$

donde $c>2, ac>0$,

$$A^2=\begin{pmatrix}5 & c & a\\ 4 & b & c\\ \cdot & \cdot & 7\end{pmatrix}$$

Los valores propios de A satisfacen la ecuación

$$3\lambda^3-6\lambda^2+t\lambda+18=0,\ A^2\bar{x}=\bar{x},\ t<0,\ \bar{x}\neq\bar{0}.$$

Encontrar los valores y vectores propios de A.

Rpta: $$a = 1,\ c = 3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -2$$

$$\bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0, \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, r \neq 0, \bar{x}_3 = m\begin{pmatrix} -11 \\ -1 \\ 14 \end{pmatrix}, m \neq 0$$

2) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ c & 1 & b \\ c & b & 1 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es 6 y cuyos valores propios satisfacen la ecuación

$$3\lambda^3 + t\lambda^2 + 33\lambda + k = 0 \text{ si } A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Hallar los valores y vectores propios de

$$f(A) = 18A^{-5} - 12A^{-3} + 6A^{-1} - 3I$$

3) Si

$$A = \begin{pmatrix} a & -a & c \\ b & b & 1 \\ b & c & -1 \end{pmatrix}$$

es una matriz de orden 3 con valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ y vectores propios asociados $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ respectivamente.

Si $A\bar{x}_3 = \bar{x}_3,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1,\ \bar{x}_3 = t(1, -1, -1)^T, t \neq 0$. Encontrar los valores y vectores propios de $f(A) = 4A^3 - 3A + 2I$

Rpta:

$$a = 2,\ b = 1,\ c = 3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 1$$

$$\bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0,\ \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} -11 \\ -1 \\ 14 \end{pmatrix},\ r \neq 0,\ \bar{x}_3 = m\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ m \neq 0$$

$$f(\lambda_1) = 101,\ f(\lambda_2) = -24,\ f(\lambda_3) = 3$$

4) Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b & d \\ c & -b & c \\ -4b & -b & -a \end{pmatrix}$$

los valores propios de A^{-1} son $\lambda'_1 = 1,\ \lambda'_2 = -1,\ \lambda'_3 = \frac{1}{2}$ y sus respectivos vectores propios son $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 = t(-2, 1, 2)^T, t \neq 0$.

Si $2(c - a) = 3(b - d)$, hallar los valores y vectores propios de $f(A) = 4A^3 - 2A^2 + A - 5I$

5) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & -5 & 9 \\ b & 0 & -1 \\ a & b & -2b \end{pmatrix}$$

las raíces características de A satisfacen la ecuación $\lambda^3 + 3\lambda^2 + t\lambda - 3 = 0$. Encontrar los valores y vectores característicos de la matriz

$$f(A) = 2A^4 - A^3 + 7A^2 - 5A - I$$

Rpta:
$$a = 1,\ b = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 9 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = -3$$

$$\bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix},\ t \neq 0,\ \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix},\ r \neq 0,\ \bar{x}_3 = m\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ m \neq 0$$

$$f(\lambda_1) = 2,\ f(\lambda_2) = 14,\ f(\lambda_3) = 266$$

6) A y B son matrices cuadradas de orden 3 tales que:

$$F_3(\frac{1}{2})F_{23}F_{12}(1)F_{32}(-1)F_{31}(-2)A = B, \text{ donde } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Encontrar los valores y vectores propios de $f(A) = A^3 - 5A^2 + 2I$.

7) Sea la matriz cuadrada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ a & b & a \\ c & -c & 4 \end{pmatrix}$$

cuyos valores propios satisfacen la ecuación $\lambda^3 - 12\lambda + k = 0$. Un vector propio de A asociado a λ es $\bar{x} = t(1, 1, 2)^T, t \neq 0$ (los vectores propios de A son L.I.)

(a) Calcular A.

(b) Encontrar los valores y vectores propios de $f(A) = (\frac{1}{4}A)^{-1} - 3A + I$

Rpta:

(a) $$a = 3,\ b = -5,\ c = 6 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 4$$

$$\bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0,\ \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ r \neq 0,\ \bar{x}_3 = m\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ m \neq$$

(b) $f(\lambda_1) = 5 = f(\lambda_2),\ f(\lambda_3) = -10$

8) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & -b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & -b & b & a \end{pmatrix}$$

donde a, b y c son números reales y $b > c > a$. El polinomio característico de A es $P(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + r\lambda^2 + t\lambda + 9$. Si $\bar{x} = m(1, -1, 0, -1)^T, m \neq 0$ es un vector propio de A asociado a un valor propio negativo. Hallar los valores y vectores propios de $(\frac{1}{3}A)^{-3}$.

9) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & a & -a \\ -b & 5 & b \\ a & a & -b \end{pmatrix}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ y los valores propios de A satisfacen la ecuación $\lambda^3 - 11\lambda^2 + 39\lambda - 45 = 0$ encontrar los valores y vectores propios de

$$f(A) = 6A^4 + \frac{1}{3}A^3 - A^2 - 3I$$

Rpta:

$$a = 1,\ b = -2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 5$$

$$\bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0,\ \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ r \neq 0,\ \bar{x}_3 = m\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ m \neq 0$$

$$f(\lambda_1) = 483,\ f(\lambda_2) = 483,\ f(\lambda_3) = \frac{11291}{3}$$

10)

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -2b & 5 & 0 \\ -2b & b & c \end{pmatrix}$$

es una matriz con determinante positivo $b > 0$, $|\text{adj}(A)| = 81$, los valores propios de A satisfacen la ecuación $2\lambda^3 - 14\lambda^2 - k\lambda + t = 0$ y 3 es un valor propio de A. Encontrar los valores y vectores propios de $(\frac{1}{3}A)^{-1}$

11) A es una matriz cuadrada de orden 3, no singular, la matriz inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ b & c & -b \\ b & 0 & 2b \end{pmatrix},$$

los valores propios de A^{-1} satisfacen la ecuación $6\lambda^3 - 11\lambda^2 + 6\lambda - 1 = 0$ donde a, b y c son enteros y $b + c - a = 7$. Calcular los valores y vectores propios de $f(A) = A^3 - 7A^2 + 3I$

Rpta: $$a = 1,\ b = 2,\ c = 6 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1^{-1} = 1,\ \lambda_2^{-1} = \frac{1}{2},\ \lambda_3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$\bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0,\ \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ r \neq 0,\ \bar{x}_3 = m\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ m \neq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$$

$$f(\lambda_1) = 3,\ f(\lambda_2) = -17,\ f(\lambda_3) = -33$$

$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$ vectores propios de $f(A)$.

8.2 Vectores propios linealmente independientes (L.I.)

Interesa averiguar cuándo los vectores propios de una matriz son L.I.

Teorema 8.4

Si los valores de una matriz son diferentes entonces los vectores propios asociados son L.I.

Demostración. (Vamos a demostrar el teorema para una matriz cuadrada de orde 3)

Sean λ_1, λ_2 y λ_3 vectores propios diferentes de A y $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ y $\bar{x}_3$ los vectore propios no nulos asociados a cada λ_i respectivamente.

Supongamos que $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$ es L.D. entonces existen escalares k_1, k_2 y k_3 n todos nulos tales que

$$k_1\bar{x}_1 + k_2\bar{x}_2 + k_3\bar{x}_3 = \bar{0}$$

multiplicamos ambos miembros por $(A - \lambda_3 I)$

$$(A-\lambda_3 I)(k_1\bar{x}_1 + k_2\bar{x}_2 + k_3\bar{x}_3) = (A-\lambda_3 I)\bar{0} = \bar{0}$$

operando:

$$\begin{aligned} k_1(A-\lambda_3 I)\bar{x}_1 + k_2(A-\lambda_3 I)\bar{x}_2 + k_3(A-\lambda_3 I)\bar{x}_3 &= \bar{0} \\ k_1(A-\lambda_3 I)\bar{x}_1 + k_2(A-\lambda_3 I)\bar{x}_2 &= \bar{0} \end{aligned}$$

multiplicando ambos miembros por $(A - \lambda_2 I)$

$$(A-\lambda_2 I)[k_1(A-\lambda_3 I)\bar{x}_1 + k_2(A-\lambda_3 I)\bar{x}_2] = (A-\lambda_2 I)\bar{0} = \bar{0}$$

operando:

$$\begin{aligned} k_1(A-\lambda_2 I)(A-\lambda_3 I)\bar{x}_1 + k_2(A-\lambda_2 I)(A-\lambda_3 I)\bar{x}_2 &= \bar{0} \\ k_1(A-\lambda_2 I)(A\bar{x}_1 - \lambda_3\bar{x}_1) + k_2(A-\lambda_2 I)(A\bar{x}_2 - \lambda_3\bar{x}_2) &= \bar{0} \\ k_1(A-\lambda_2 I)(\lambda_1\bar{x}_1 - \lambda_3\bar{x}_1) + k_2(A-\lambda_2 I)(\lambda_2\bar{x}_2 - \lambda_3\bar{x}_2) &= \bar{0} \\ k_1(\lambda_1-\lambda_3)(A-\lambda_2 I)\bar{x}_1 + k_2(\lambda_2-\lambda_3)(A-\lambda_2 I)\bar{x}_2 &= \bar{0} \\ k_1(\lambda_1-\lambda_3)(A-\lambda_2 I)\bar{x}_1 &= \bar{0} \\ k_1(\lambda_1-\lambda_3)(A\bar{x}_1 - \lambda_2\bar{x}_1) &= \bar{0} \\ k_1(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1\bar{x}_1 - \lambda_2\bar{x}_1) &= \bar{0} \\ k_1(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_2)\bar{x}_1 &= \bar{0} \end{aligned}$$

si y solo si

$$k_1 = 0 \text{ puesto que } \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$$

De manera similar podemos demostrar que $k_2 = 0$ y $k_3 = 0$ entonces $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$ es L.I. lo que contradice la hipótesis.

Por lo tanto queda demostrado que a valores propios diferentes los vectores propios asociados son L.I. ◇

Nota

Si los valores propios de una matriz no son distintos los vectores propios asociados pueden o no ser L.I. Veamos:

Ejemplo 8.13

Encontrar los valores y vectores propios de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = 4$$
$$\lambda_1 = 4 \to \bar{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

tal que

$$(A - \lambda_1 I)\bar{x}_1 = \bar{0}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$r(A - \lambda_1 I) = 0 < n$$

entonces

$$\exists n - 0 = 2 \text{ incógnitas arbitrarias}$$
$$x_1 = t, \; x_2 = r$$
$$\text{Si } r = 0 \Rightarrow \bar{x}_1 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; t \neq 0$$
$$\text{si } t = 0 \Rightarrow \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; r \neq 0$$

$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ es L.I.

$$P(\lambda) = |B - \lambda I| = 0$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = 4$$
$$\lambda_1 = 4 \to \bar{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

tal que

$$(B - \lambda_1 I)\bar{x}_1 = \bar{0}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$r(B - \lambda_1 I) = 1 < n$$

entonces

$$\exists\, n - 1 = 1 \text{ incógnita arbitraria}$$
$$x_1 = k,\ x_2 = 0$$
$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ k \neq 0$$
$$\lambda_2 = 4 \to \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

obtenemos la misma matriz y no existe otra elección para $x_1 = m,\ x_2 = 0$

$$\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ m \neq 0$$

$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ es L.D.

Definición 8.5

Dadas dos matrices cuadradas A y B de orden n. Se dice que A es **semejante** (o **similar**) a B, si existe una matriz C no singular de orden n tal que $C^{-1}AC = B$.

Ejemplo 8.14

Determinar si las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

son matrices semejantes.

Debe existir una matriz

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

no singular tal que $C^{-1}AC = B$, es decir $AC = CB$ entonces:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Operando:

$$\begin{pmatrix} 2a + c & 2b + d \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a + 5b & -2a - 3b \\ 4c + 5d & -2c - 3d \end{pmatrix}$$

Igualando:

$$\left.\begin{aligned} 2a + 5b - c \quad &= 0 \\ 2a + 5b \quad + d &= 0 \\ 5c + 5d &= 0 \\ 2c + 2d &= 0 \end{aligned}\right\} \quad SHEL$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_A$$

$r(A) = 2 < n$ entonces $\exists n - 2 = 2$ incógnitas arbitrarias $a = t, b = r$

$$2a + 5b - c = 0 \Rightarrow c = 2a + 5b = 2t + 5r$$
$$c + d = 0 \Rightarrow d = -c = -2t - 5r$$

$$C = \begin{pmatrix} t & r \\ 2t + 5r & -2t - 5r \end{pmatrix} \quad \text{tal que} \quad |C| = (2t + 5r)(t + r) \neq 0$$

existen infinitos valores de r y t tales que $|C| \neq 0$.
En particular, si $t = 1, r = -2$ entonces

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$$

es no singular tal que

$$C^{-1} = \frac{1}{-8}\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -8 & -2 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1}AC = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -8 & -2 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = B$$

Por lo tanto A es semejante a B

Teorema 8.5

Dos matrices semejantes tienen los mismos determinantes y los mismos valores propios.

Demostración. Si A y B son matrices semejantes o similares entonces existe C no singular tal que $C^{-1}AC = B$.
Como el determinante del producto de matrices es igual al producto de sus determinantes tenemos:

$$\begin{aligned} |B| &= |C^{-1}AC| \\ &= |C^{-1}||A||C| \\ &= |C^{-1}C||A| = |I||A| = 1|A| = |A| \end{aligned}$$

Luego A y B tienen el mismo determinante

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= |C^{-1}(A - \lambda I)C| \\ &= |C^{-1}AC - \lambda C^{-1}IC| \\ &= |C^{-1}AC - \lambda I| \\ &= |B - \lambda I| \end{aligned}$$

A y B tienen el mismo polinomio característico, la misma ecuación característica y por tanto los mismos valores propios. ◇

Ejemplo 8.15

En el ejemplo anterior, se demostró que:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

son matrices semejantes luego:

$$|A| = |B| = -2$$

(A y B tienen el mismo determinante)

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

entonces

$$(2-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$
$$\lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = -1$$

$$P(\lambda) = |B - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 5 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-3-\lambda) + 10 = 0$$

entonces

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$
$$(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$
$$\lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = -1$$

A y B tienen los mismos valores propios $\lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = -1$

Nota

El recíproco de este teorema no es necesariamente verdadero. Es decir: si dos matrices tienen el mismo determinante y los mismos valores propios no implica que A sea semejante a B. Por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tienen los mismos determinantes ($|A| = |B| = 1$) y los mismos valores propios ($\lambda_1 = \lambda_2 = 1$), sin embargo para todo C no singular

$$C^{-1}AC = I \neq B$$

por tanto A no es semejante a B.

Propiedades

1) Si A es semejante a B y B es semejante a C, entonces A es semejante a C.

2) Si A es semejante a B, entonces A^n es semejante a B^n; $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Demostración. 1) Si A es semejante a B, entonces existe P no singular tal que $P^{-1}AP = B$

Si B es semejante a C, entonces existe Q no singular tal que $Q^{-1}BQ = C$

entonces

$$\begin{aligned} Q^{-1}BQ = Q^{-1}(P^{-1}AP)Q &= C \\ (Q^{-1}P^{-1})A(PQ) &= C \\ (PQ)^{-1}A(PQ) &= C \end{aligned}$$

entonces A es semejante a C.

2) Si A es semejante a B, entonces existe P no singular tal que

$$P^{-1}AP = B$$

$$B^2 = BB = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)$$

$$= P^{-1}A(PP^{-1})AP$$
$$= P^{-1}A^2P$$

entonces A^2 es semejante a B^2.

$$\begin{aligned} B^3 = B^2B &= (P^{-1}A^2P)(P^{-1}AP) \\ &= P^{-1}A^2(PP^{-1})AP \\ &= P^{-1}A^3P \end{aligned}$$

entonces A^3 es semejante a B^3.

En general $P^{-1}A^nP = B^n; \forall n \in \mathbb{Z}^+$ entonces A^n es semejante a B^n



8.3 Diagonalización de una matriz

Ahora nos preguntamos: ¿Cuándo es posible diagonalizar una matriz y cómo se lleva a cabo este proceso? La utilidad del proceso de diagonalización es amplia por sus aplicaciones, en especial permite realizar, de manera simple, potencias de una matriz: si una matriz recoge toda la información de cierta situación, las potencias nos indicarán cómo evolucionará en el tiempo esta información.

Consideremos el siguiente problema:

Dada una matriz cuadrada A, existe una matriz no singular P tal que $P^{-1}AP = D$ donde D es una matriz diagonal.

Este problema sugiere la siguiente definición.

Definición 8.6

Una matriz cuadrada A es **diagonalizable** si es semejante (o similar) a una matriz diagonal D.
Es decir;
A es **diagonalizable** si existe una matriz no singular P tal que $P^{-1}AP = D$, donde D es una matriz diagonal

Definición 8.7

Si $P^{-1}AP = D$ se dice que P **diagonaliza** a A.

Teorema 8.6

Si A es una matriz cuadrada de orden n. A es diagonalizable si y solo si A tiene n vectores propios L.I.

Demostración. ($\Rightarrow$) Si A es diagonalizable entonces A tiene n vectores propios L.I.

Si A es diagonalizable entonces existe una matriz no singular P tal que $P^{-1}AP = D$ donde

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & & & \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = D \Rightarrow AP = PD$$

Para ilustrar la demostración, vamos a trabajar con matrices cuadradas de orden 2

$$AP = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = PD$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}p_{11} + a_{12}p_{21} & a_{11}p_{12} + a_{12}p_{22} \\ a_{21}p_{11} + a_{22}p_{21} & a_{21}p_{12} + a_{22}p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} p_{11} + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{21} \end{pmatrix} p_{21} \quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} p_{12} + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{21} \end{pmatrix} p_{22} \right) =$$

$$\left(\lambda_1 \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} \quad \lambda_2 \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} \right)$$

$$\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} \right) = \left(\lambda_1 \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} \quad \lambda_2 \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} \right)$$

Si P_1 y P_2 denotan los vectores columna de P

$$\begin{pmatrix} AP_1 & AP_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 P_1 & \lambda_2 P_2 \end{pmatrix} \Rightarrow AP_1 = \lambda_1 P_1 \text{ y } AP_2 = \lambda_2 P_2$$

entonces P_1 y P_2 son los vectores propios de A asociado a λ_1 y λ_2 respectivamente.
Como P es no singular, entonces P es invertible entonces los vectores columna de P son diferentes de cero y L.I.
Para una matriz A de orden n, entonces A tiene n vectores propios L.I.
($\Leftarrow$) Si A tiene n vectores propios L.I. entonces A es diagonalizable.
Supongamos que A tiene n vectores propios $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ L.I. asociados a n valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ respectivamente y sea

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & & & \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

cuyos vectores columna son $P_1, P_2, \ldots, P_n$ entonces las columnas del producto AP son: $AP_1, AP_2, \ldots, AP_n$ es decir

$$AP = \begin{pmatrix} AP_1 & AP_2 & \cdots & AP_n \end{pmatrix}_n$$

Pero $AP_1 = \lambda_1 P_1,\ AP_2 = \lambda_2 P_2, \ldots, AP_n = \lambda_n P_n$
Por tanto

$$AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & & & \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= PD$$

donde D es una matriz diagonal que tiene como elementos en la diagonal principal a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Puesto que los vectores columna de P son L.I., entonces P es no singular, luego P es invertible y $P^{-1}AP = D$, por tanto A es diagonalizable o P diagonaliza a A. $\diamond$

Nota

La demostración de este teorema proporciona un procedimiento para diagonalizar una matriz, si es posible.

1) Encontrar los valores y vectores propios de A, $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ L.I.

2) Formar la matriz P que tenga como vectores columna a $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

3) La matriz $P^{-1}AP$ será diagonal y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ serán los elementos sucesivos en su diagonal principal donde λ_i es el valor propio correspondiente a $P_i, \forall i = 1, 2, \ldots, n$.

Ejemplo 8.16

Diagonalizar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

si es que es posible

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$
$$(\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0$$

entonces $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1$

$$\lambda_1 = 5 \to \bar{x}_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\lambda_2 = -1 \to \bar{x}_2 = r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; r \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ es L.I entonces

$$P = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ es no singular} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = D$$

Nota

El orden de las columnas de P es completamente arbitrario. Un cambio en el orden de las columnas de P solamente altera el orden de los valores propios en la diagonal de $P^{-1}AP$.

La nominación de los ceros de $P(\lambda) = 0$ depende de nosotros y no del problema. Si se elige $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 5$ entonces

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

es no singular entonces

$$P^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = D$$

Ejemplo 8.17

Si

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

encontrar si es posible una matriz P que diagonalice a A,

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 39\lambda + 45 = 0$$
$$-(\lambda - 3)^2(\lambda - 5) = 0$$

$$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 5,$$

$$\bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \neq 0,\ \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r \neq 0,\ \bar{x}_3 = m\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, m \neq 0$$

$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$ es L.I. entonces A es diagonalizable

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \text{diag}(3,3,5)$$

Simplemente como ilustración, si hacemos otras selecciones para λ. Es decir:

1) $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 3$

$$\bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \neq 0,\ \bar{x}_2 = m\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, m \neq 0,\ \bar{x}_3 = r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r \neq 0$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

entonces

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

2) $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 3$

$$\bar{x}_1 = m\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, m \neq 0,\ \bar{x}_2 = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \neq 0,\ \bar{x}_3 = r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r \neq 0$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

entonces

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 8.18

Diagonalizar, si es posible,

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = -(\lambda + 2)^2(\lambda - 4) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -2$$

1) $\lambda_1 = 4$ entonces

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

tal que $A\bar{x}_1 = \lambda_1\bar{x}_1$

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} -7 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E$$

$$x_3 = t,\ x_2 = x_3 = t,\ x_1 = x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow \bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} - \{0\}$$

2) $\lambda_2 = -2$ entonces

$$\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

tal que $A\bar{x}_2 = \lambda_2\bar{x}_2$

$$(A - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E$$

$$x_3 = 0,\ x_2 = r,\ x_1 = x_2 - x_3 = r \Rightarrow \bar{x}_2 = r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3) $\lambda_2 = -2$ entonces

$$\bar{x}_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

tal que $A\bar{x}_3 = \lambda_3 \bar{x}_3$

$(A - \lambda_3 I)$ es la misma matriz que se obtuvo en b) y por tanto tiene la misma solución. Luego

$$\bar{x}_3 = m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, m \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$ es L.D puesto que $\{\bar{x}_2, \bar{x}_3\}$ es L.D

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

no es invertible entonces no existe P tal que $P^{-1}AP = D$. Por tanto A no es diagonalizable

Nota

Surge la pregunta: ¿Cuándo una matriz es diagonalizable?

1) Si una matriz cuadrada A de orden n tiene n valores propios diferentes, entonces A es diagonalizable.

2) Si a valores propios que se repiten los vectores propios asociados son L.I., entonces A es diagonalizable.

8.4 Ejercicios propuestos

1) Encontrar una matriz P que diagonalice a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Rpta: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3,$

$$\bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0,\ \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, r \neq 0,\ \bar{x}_3 = m\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, m \neq 0$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = D = \text{diag}(1, 2, 3)$$

2) Diagonalizar si es posible la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}, a \neq 0$$

3) Para cada matriz, hallar los valores y vectores propios de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y } B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

¿Qué matriz es diagonalizable y por qué?

Rpta: $A: \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -2$

$$\bar{x}_1 = t\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, t \neq 0,\ \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, r \neq 0,\ \bar{x}_3 = m\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, m \neq 0$$

$$P = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 0 & 1\\2 & 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\-2 & 2 & 0\\-1 & 3 & -1\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = D = \text{diag}(4, -2, -2)$$

$$B: \lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -2$$

$$\bar{x}_1 = n\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, n \neq 0,\ \bar{x}_2 = q\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, q \neq 0,\ \bar{x}_3 = k\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, k \neq 0$$

$$P = \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix},\ |P| = 0$$

entonces P^{-1} no existe, por tanto B no es diagonalizable

4) Sean las matrices cuadradas A y B de orden n. Si la matriz A es semejante a la matriz B. Demostrar que traza(A) = traza(B)

5) Diagonalizar A, si es posible, si

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & -8 & 0 & 6\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & -9 & 0 & 7\end{pmatrix}$$

Rpta: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \lambda_4 = -2$

$$\bar{x}_1 = t\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, t \neq 0,\ \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, r \neq 0,\ \bar{x}_3 = m\begin{pmatrix}0\\2\\0\\3\end{pmatrix}, m \neq 0.$$

$$\bar{x}_4 = n\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, n \neq 0$$

$$P = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&2&1\\0&1&0&0\\0&0&3&1\end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&1\\0&3&0&-2\end{pmatrix}$$

entonces $P^{-1}AP = D = \text{diag}(1,1,1,-2)$

6)

$$A = \begin{pmatrix}x&y&0\\-2y&5&0\\-2y&y&z\end{pmatrix}$$

es una matriz con determinante positivo donde $y > 0, |\operatorname{adj}(A)| = 81$. Los valores propios de A satisfacen la ecuación $2\lambda^3 - 14\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ y 3 es un valor propio de A.

(a) Encontrar los valores y vectores propios de A.

(b) Diagonalizar A si es posible

7) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix}-2&c&0\\1&2&d\\d&3&2\end{pmatrix}$$

donde c y d son enteros $c + d = -3$, los valores propios de A satisfacen la ecuación

$$2\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + 12 = 0$$

(a) Encontrar los valores y vectores propios de

$$f(A) = 3A^5 - 2A^3 + 5A - 2I$$

(b) Diagonalizar A si es posible.

Rpta:

(a) $$c = -5,\ d = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 3,$$

$$\bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0,\ \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r \neq 0,\ \bar{x}_3 = m\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, m \neq 0$$

$$f(\lambda_1) = 4,\ f(\lambda_2) = -92,\ f(\lambda_3) = 688$$

(b) $$P = \begin{pmatrix} -5 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = D = \text{diag}(1, -2, 3)$$

8) Sea

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Encontrar los valores y vectores propios de A.

(b) Diagonalizar A si es posible.

9) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} b & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \\ 1 & b & a \end{pmatrix}$$

donde a y b son números enteros, la suma de los valores propios de A es 5 y $|A| = 3$.

(a) Hallar los valores y vectores propios de $f(A) = 4A^3 - 5A^2 + 6A - 7I$

(b) Diagonalizar A, si es posible.

Rpta:

(a) $$a = -4,\ b = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

$$\bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0,\ \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r \neq 0,\ \bar{x}_3 = m\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, m \neq$$

$$f(\lambda_1) = 74,\ f(\lambda_2) = -2,\ f(\lambda_3) = -2$$

(b) $$P = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -1 & -2 & 7 \\ -3 & -4 & 15 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = D = \text{diag}(3, 1, 1)$$

10) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} b & b & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & b & a \end{pmatrix}$$

donde a y b son enteros, los valores propios de A satisfacen la ecuación λ^3 $8\lambda^2 + 17\lambda - 10 = 0$

(a) Encontrar los valores y vectores propios de

$$f(A) = (3A)^4 + (10A)^2 + 5A - 8I.$$

(b) Diagonalizar A^{-1} si es posible.

11) Sea

$$A = \begin{pmatrix} 7 & c & 6 \\ d & -19 & d \\ 12 & 2c & 13 \end{pmatrix}$$

la matriz de orden 3, donde $c < d, c + d = -2$, los valores propios de A satisfacen la ecuación $8\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + 8 = 0$

(a) Encontrar los valores y vectores propios de A.

(b) Diagonalizar A si es posible.

Rpta:

(a) $$c = -12,\ d = 10 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$$

$$\bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \neq 0,\ \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r \neq 0,\ \bar{x}_3 = m\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, m \neq 0$$

(b) $$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = D = \text{diag}(1, 1, -1)$$

12)

$$A = \begin{pmatrix} -3 & a & -a \\ -7 & 5 & -a \\ c & b & -2a \end{pmatrix}$$

donde $A\bar{x}_1 = 4\bar{x}_1, \bar{x}_1 \neq \bar{0}, |(\frac{1}{2}A)^{-1}|^2 = \frac{1}{4}$

(a) Encontrar los valores y vectores propios de $f(A) = \frac{3}{4}A^3 - \frac{1}{2}A^2 + A + 5I$

(b) Diagonalizar $f(A)$, si es posible

13) Sea la matriz cuadrada

$$A = \begin{pmatrix} 3c & d & -d \\ b & 1 & a \\ 13 & d & -c \end{pmatrix}$$

cuyos elementos son números enteros $|A| > 0, \text{adj}(A) = 2B, b_{21} = 4$

Si $\bar{x} = t(1, -1, 1)^T$ es un vector propio de A asociado a $\lambda = 1$

(a) Encontrar los valores y vectores propios de A^{-1}

(b) Diagonalizar $3A$ si es posible.

Rpta:

$$a=1,\ b=-1,\ c=5,\ d=7 \Rightarrow A=\begin{pmatrix}15 & 7 & -7\\ -1 & 1 & 1\\ 13 & 7 & -5\end{pmatrix}$$

(a) $$A^{-1}: \lambda_1^{-1}=1,\ \lambda_2^{-1}=\frac{1}{2},\ \lambda_3^{-1}=\frac{1}{8}$$

$$\bar{x}_1=t\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}, t\neq 0,\ \bar{x}_2=r\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}, r\neq 0,\ \bar{x}_3=m\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, m\neq$$

(b) $$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \qquad P^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}(3A)P=D=\text{diag}(3,6,24)$$

14) Sea la matriz

$$A=\begin{pmatrix}a & a & 6b\\ a & b & 3b\\ 2b & b & c\end{pmatrix}$$

donde a, b y c son enteros, cuyos valores propios satisfacen la ecuación $\lambda^3-2\lambda^2-20\lambda-24=0$ y el vector $\bar{x}=t(-2,-1,1)^T, t\neq 0$ es un vector propio de A asociado a λ.

(a) Encontrar los valores y vectores propios de

$$f(A)=3A^4-2A^3+A^2+I$$

(b) Diagonalizar A^{-1} si es posible.

8.5 Aplicaciones de las matrices diagonalizables

El siguiente teorema nos proporciona una manera fácil de calcular las potencias de una matriz diagonalizable.

Teorema 8.7

Si A es diagonalizable entonces $P^{-1}A^mP = D^m$, donde $m \in \mathbb{Z}^+$

Demostración. Si A es diagonalizable entonces $P^{-1}AP = D$

$$\begin{aligned} (P^{-1}AP)^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) &= DD \\ P^{-1}A(PP^{-1})AP &= D^2 \\ P^{-1}A^2P &= D^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (P^{-1}AP)^3 = (P^{-1}AP)^2(P^{-1}AP) &= D^2D \\ (P^{-1}A^2P)(P^{-1}AP) &= D^3 \\ P^{-1}A^2(PP^{-1})AP &= D^3 \\ P^{-1}A^3P &= D^3 \end{aligned}$$

En general si $m \in \mathbb{Z}^+$ entonces $(P^{-1}AP)^m = P^{-1}A^mP = D^m$ ◇

Nota

Este teorema es útil para encontrar cualquier potencia de una matriz diagonalizable.

En efecto:

$$\begin{aligned} P^{-1}A^mP &= D^m \\ A^m &= PD^mP^{-1}, \ \forall m \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

Ejemplo 8.19

Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcular A^{30} y A^{-25}

$$\lambda_1 = 5 \Rightarrow \bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \neq 0$$

$$\lambda_2 = -1 \Rightarrow \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, r \neq 0$$

$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ es L.I. entonces A es diagonalizable.

1)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= D \\ A &= PDP^{-1} \\ A^{30} &= PD^{30}P^{-1} \end{aligned}$$

$$A^{30} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{30}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^{30}-2 & 5^{30}+1 \\ 2(5^{30})+2 & 2(5^{30})-1 \end{pmatrix}$$

2) Si $A = PDP^{-1}$ entonces

$$\begin{aligned} A^{-1} &= (PDP^{-1})^{-1} = PD^{-1}P^{-1} \\ A^{-25} &= PD^{-25}P^{-1} \end{aligned}$$

$$A^{-25} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-25}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^{-25}-2 & 5^{-25}+1 \\ 2(5^{-25})+2 & 2(5^{-25})-1 \end{pmatrix}$$

En la teoría de matrices, el siguiente teorema juega un rol muy importante e interesante

Teorema 8.8: Teorema de Hamilton-Cayley[2]

Toda matriz cuadrada A es un cero de su polinomio característico.

[2]Sir William Rowan Hamilton, matemático irlandés (1805-1865),
Arthur Cayley, matemático inglés (1821-1895)

Demostración. Si A es una matriz cuadrada de orden n entonces

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = b_n\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0 = 0$$

es la ecuación característica de A

$$\begin{aligned} P(A) &= b_nA^n + b_{n-1}A^{n-1} + \cdots + b_1A + b_0I \\ P(A)\bar{x}_i &= (b_nA^n + b_{n-1}A^{n-1} + \cdots + b_1A + b_0I)\bar{x}_i \end{aligned}$$

donde $A\bar{x}_i = \lambda_i\bar{x}_i$

$$\begin{aligned} P(A)\bar{x}_i &= b_nA^n\bar{x}_i + b_{n-1}A^{n-1}\bar{x}_i + \cdots + b_1A\bar{x}_i + b_0I\bar{x}_i \\ &= b_n\lambda_i^n\bar{x}_i + b_{n-1}\lambda_i^{n-1}\bar{x}_i + \cdots + b_1\lambda_i\bar{x}_i + b_0\bar{x}_i \\ P(A)\bar{x}_i &= (b_n\lambda_i^n + b_{n-1}\lambda_i^{n-1} + \cdots + b_1\lambda_i + b_0)\bar{x}_i \\ P(A)\bar{x}_i &= 0,\ i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Por lo tanto $P(A)X = 0$ donde X es la matriz de los vectores propios de A. Puesto que los vectores propios son L.I. entonces X es inversible y X^{-1} es único. Luego

$$P(A)XX^{-1} = 0X^{-1} = 0 \Rightarrow P(A) = 0$$



Ejemplo 8.20

D.q. la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

satisface la ecuación característica.

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) + 2$$

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^2 - 5\lambda + 8 \\ P(A) &= A^2 - 5A + 8I = 0 \end{aligned}$$

(Por el Teorema Hamilton-Cayley)

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$
$$= \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -10 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ -10 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces $P(A) = 0$ entonces A satisface su ecuación característica.

Nota

Una aplicación interesante del Teorema de Hamilton-Cayley es que se puede usar para determinar la inversa de una matriz no singular A.

Sea $b_n\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1 A + b_0 I = 0$ la ecuación característica de A.

Si A es una matriz no singular, entonces $\lambda_i \neq 0$ y $b_0 = |A| = 0$. Por el Teorema de Hamilton-Cayley

$$b_n A^n + b_{n-1}A^{n-1} + \cdots + b_1 A + b_0 I = 0$$
$$I = -\frac{1}{b_0}(b_n A^n + b_{n-1}A^{n-1} + b_1 A)$$

multiplicando ambos miembros por A^{-1}

$$A^{-1} = -\frac{1}{b_0}(b_n A^{n-1} + b_{n-1}A^{n-2} + \cdots + b_1 I)$$

Ejemplo 8.21

Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley, encontrar A^{-1} para la matriz del ejemplo anterior.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

entonces

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 8 = 0$$
$$P(A) = A^2 - 5A + 8I = 0$$

$$A^{-1}(A^2 - 5A + 8I) = A^{-1}0 = 0$$
$$A - 5I + 8A^{-1} = 0$$
$$A^{-1} = \frac{1}{8}(5I - A)$$

$$5I - A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 8.22

Jsar el Teorema de Hamilton-Cayley para encontrar A^{-4} si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$
$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$$

$$P(A) = A^3 - 3A^2 + 2A - I = 0$$
$$A^2 - 3A + 2I - A^{-1} = 0A^{-1} = 0$$
$$A^{-1} = A^2 - 3A + 2I$$
$$A^{-2} = A^{-1}A^{-1} = (A^2 - 3A + 2I)A^{-1} = A - 3I + 2A^{-1}$$
$$A^{-2} = A - 3I + 2(A^2 - 3A + 2I) = 2A^2 - 5A + I$$

$$A^{-4} = A^{-2}A^{-2} = (2A^2 - 5A + I)A^{-2} = 2I - 5A^{-1} + A^{-2}$$
$$= 2I - 5(A^2 - 3A + 2I) + (2A^2 - 5A + I)$$
$$A^{-4} = -3A^2 + 10A - 7I$$

$$A^{-4} = -3\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^2 + 10\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 7 & -7 & 10 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Comprobando:

$$A^4 = A^2A^2 = \begin{pmatrix} 12 & 16 & -25 \\ 2 & 3 & -5 \\ -7 & -9 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow A^4A^{-4} = \begin{pmatrix} 12 & 16 & -25 \\ 2 & 3 & -5 \\ -7 & -9 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 7 & -7 & 10 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} = I$$

Teorema 8.9

Sean A y B matrices reales de orden n, cada una con valores propios distintos. Entonces

$$AB = BA \Leftrightarrow A \text{ y } B \text{ tienen los mismos vectores propios}$$

Demostración. Si A tiene n valores propios diferentes, entonces los vectores propios asociados son L.I. entonces A es diagonalizable. Es decir existe P no singular tal que $P^{-1}AP = D_1$ igualmente para B, existe Q no singular tal que $Q^{-1}BQ = D_2$

($\Leftarrow$) D.q. Si A y B tienen los mismos vectores propios, entonces $AB = BA$.
Si A y B tienen los mismos vectores propios, entonces $P = Q = R$ y

$$\begin{aligned} AB &= (PD_1P^{-1})(QD_2Q^{-1}) \\ &= (RD_1R^{-1})(RD_2R^{-1}) \\ &= RD_1(R^{-1}R)D_2R^{-1} \\ &= R(D_1D_2)R^{-1} \\ &= R(D_2D_1)R^{-1} \\ &= RD_2(R^{-1}R)D_1R^{-1} \\ &= (RD_2R^{-1})(RD_1R^{-1}) = BA \end{aligned}$$

($\Rightarrow$) D.q. Si $AB = BA$, entonces A y B tienen los mismos vectores propios.
Sea $\bar{x}$ un vector propio de B asociado a λ entonces

$$\begin{aligned} B\bar{x} &= \lambda\bar{x} \\ (BA)\bar{x} &= (AB)\bar{x} = A(B\bar{x}) = A(\lambda\bar{x}) = \lambda(A\bar{x}) \\ B(A\bar{x}) &= \lambda(A\bar{x}) \end{aligned}$$

entonces $A\bar{x}$ es un vector propio de B asociado a λ.

$\{\bar{x}, A\bar{x}\}$ L.D. entonces

$$\bar{x} \parallel A\bar{x} \Rightarrow \exists \lambda_1 \in \mathbb{R}/A\bar{x} = \lambda_1 \bar{x}$$

entonces λ_1 es un valor propio de A y $\bar{x}$ es un vector propio de A asociado a λ_1.
Luego todo vector propio de B es un vector propio de A.
De manera similar se puede demostrar que todo vector propio de A es un vector propio de B.
Por tanto A y B tienen los mismos vectores propios 

Ejemplo 8.23

Si

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}$$

donde $AB = BA$.
Demostrar que A y B tienen los mismos vectores propios.
Para la matriz A:

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = (4 - \lambda)^2 + 9 = 0$$

entonces

$$\lambda^2 - 8\lambda + 25 = 0 \Rightarrow \lambda = 4 \pm 3i$$
$$\lambda_1 = 4 + 3i, \qquad \lambda_2 = 4 - 3i$$

1) $\lambda_1 = 4 + 3i$ entonces

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{tal que} \quad A\bar{x}_1 = \lambda_1 \bar{x}_1$$

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} -3i & 3 \\ -3 & -3i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 + ix_2 = 0$$

$$\bar{x}_1 = t \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0$$

2) $\lambda_2 = 4 - 3i$ entonces

$$\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{tal que } A\bar{x}_2 = \lambda_2 \bar{x}_2$$

$$(A-\lambda_2 I)=\begin{pmatrix}3i & 3\\ -3 & 3i\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -i\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow x_1-ix_2=0$$

$$\bar{x}_2=r\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix},r\neq 0$$

Para la matriz B:

$$P(\lambda)=|B-\lambda I|=(5-\lambda)^2+144=0$$

entonces

$$\lambda^2-10\lambda+169=0\Rightarrow\lambda=5\pm 12i$$

1) $\lambda_1=5+12i$ entonces

$$\bar{x}_1=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\quad\text{tal que } B\bar{x}_1=\lambda_1\bar{x}_1$$

$$(B-\lambda_1 I)=\begin{pmatrix}-12i & 12\\ -12 & -12i\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & i\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow x_1+ix_2=0$$

$$\bar{x}_1=m\begin{pmatrix}-i\\ 1\end{pmatrix},m\neq 0$$

2) $\lambda_2=5-12i$ entonces

$$\bar{x}_2=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\quad\text{tal que } B\bar{x}_2=\lambda_2\bar{x}_2$$

$$(B-\lambda_2 I)=\begin{pmatrix}12i & 12\\ -12 & 12i\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -i\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow x_1-ix_2=0$$

$$x_2=k,\quad x_1=ix_2=ik\Rightarrow\bar{x}_2=k\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix},k\neq 0$$

Por tanto, si A y B son matrices conmutativas con valores propios distintos, entonces A y B tienen los mismos vectores propios.

8.6 Ejercicios propuestos

1) Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 3 & 7 & 3b \\ 1 & a & -4 \end{pmatrix}$$

una matriz de orden 3 donde a y b son números enteros.

Si el determinante de A, un valor propio de A y el orden de A son numéricamente iguales.

(a) Calcular los valores y vectores propios de A.

(b) Calcular A^{-25}.

Rpta:

(a) $$a = 2, b = -5 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1,$$

$$\bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0,\ \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r \neq 0,\ \bar{x}_3 = m\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, m \neq 0$$

(b) $$P = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -1 & -2 & 7 \\ -3 & -4 & 15 \end{pmatrix}$$

$$A^{-25} = PD^{-25}P^{-1}$$

2) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} x & x & 6y \\ x & y & 3y \\ 2y & y & z \end{pmatrix}, \quad x, y, z \in \mathbb{Z}$$

cuyo polinomio característico es $P(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 20\lambda + 24$

$\bar{x} = t(-2, -1, 0)^T$ es un vector propio de A asociado a $\lambda > 0$.

(a) Encontrar los valores y vectores propios de A.

(b) Calcular $A^{16} + A^{8}$.

3) Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ b & a & b \end{pmatrix}$$

una matriz cuadrada de orden 3, donde a, b y c son enteros.

Los valores propios de A son enteros y satisfacen la ecuación $\lambda^3 - 4\lambda^2 - k\lambda + 4 = 0$. Si $\bar{x} = t(1,0,1)^T$ es un vector propio de A asociado a λ.

(a) Encontrar los valores y vectores propios de A.

(b) Calcular $(3A^2 - 2A)^{15}$

Rpta:

(a) $$a = 1,\ b = 2,\ c = 3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = -1$$

$$\bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, t \neq 0, \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r \neq 0, \bar{x}_3 = m\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, m \neq ($$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 12 & 14 & 18 \\ -6 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = D = \text{diag}(1, 4, -1)$$

(b) $$f(A) = 3A^2 - 2A,$$

$$f(\lambda_1) = 1,\ f(\lambda_2) = 40,\ f(\lambda_3) = 5$$

$$P^{-1}f(A)P = D_1 = \text{diag}(1, 40, 5)$$

$$f(A) = PD_1P^{-1} \Rightarrow (f(A))^{15} = PD_1^{15}P^{-1}$$

4) Sea la matriz cuadrada A de orden 3 donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & 0 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Encontrar los valores y vectores propios de la matriz

$$f(A) = 9A^{-2} + 6A^{-1} + A - 2I$$

(b) Calcular $(f(A))^{-1}$ si es que existe.

5) Sea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ b & 5 & 0 \\ b & a & c \end{pmatrix}$$

una matriz no singular, $\bar{x}_1 = t(1,1,1)^T$ es un vector propio de A asociado a $\lambda = 1$.

Los valores propios de A satisfacen la ecuación

$$2\lambda^3 - 14\lambda^2 + dx - 18 = 0$$

(a) Hallar los valores y vectores propios de la matriz A.

(b) Calcular A^{-50}

Rpta:

$$a = 2,\ b = -4,\ c = 3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & 0 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) $$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 3,$$

$$\bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0,\ \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r \neq 0, \bar{x}_3 = m\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, m \neq 0$$

(b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP = D = \text{diag}(1, 3, 3)$$
$$A^{-50} = PD^{-50}P^{-1}$$

6) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 10 & -4 \\ -22 & 25 & -10 \\ -32 & 34 & -13 \end{pmatrix}$$

(a) Calcular los valores y vectores propios de $(\frac{1}{3}A)^{-3}$

(b) Calcular $(3A)^{-3}$

7) Sea la matriz cuadrada no singular de orden 3, donde:

$$A^{-1} = F_{21}(2)F_3(\frac{1}{3})F_{23}(6)F_2(-\frac{1}{3})F_{13}(4)F_{12}(4)F_1(-1)$$

(a) Encontrar los valores y vectores propios de A.

(b) Determinar A^{-30}

Rpta:

(a) $A = F_1(-1)F_{12}(-4)F_{13}(-4)F_2(-3)F_{23}(-6)F_3(3)F_{12}(-2)$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & 0 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 1$$

$$\bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, t \neq 0,\ \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r \neq 0,\ \bar{x}_3 = m\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, m \neq 0$$

(b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^{-30} = PD^{-30}P^{-1}$$

$$D = \text{diag}(3, 3, 1)$$

8) Si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Calcular A^{-62}

9) A es una matriz cuadrada de orden 3 y

$$F_{21}(2)F_3(\frac{1}{3})F_2(-\frac{1}{3})F_{23}(-2)F_{13}(4)F_{12}(4)F_1(-1)A = I.$$

Calcular A^{99}

Rpta:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & 0 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3, \ \lambda_3 = 1$$

$$\bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, t \neq 0, \ \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r \neq 0, \ \bar{x}_3 = m\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, m \neq 0$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{99} = PD^{99}P^{-1}$$

$$D = \text{diag}(3, 3, 1)$$

10) Sea

$$A = \begin{pmatrix} b & b & 3 \\ a & b & a \\ 2a & -b & a \end{pmatrix}$$

con a y b enteros. Los valores propios de A son tales que $\lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda_3 = -2\lambda_1$ y satisfacen la ecuación $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 2\lambda + 8 = 0$

(a) Hallar los valores y vectores propios de A.

(b) Calcular $30A^{-30}$

11) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Encontrar los valores y vectores propios de $f(A) = A^3 - 3A^2 + 6I$

(b) Calcular A^{-50}

Rpta:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 6,$$

$$\bar{x}_1 = t\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, t \neq 0,\ \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, r \neq 0,\ \bar{x}_3 = m\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, m \neq 0$$

(a) $f(\lambda_1) = f(\lambda_2) = 2,\ f(\lambda_3) = 114$

(b) $P = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\1 & 0 & 2\\0 & 1 & 1\end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2 & 2 & -2\\-1 & -1 & 3\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP = D = \text{diag}(2, 2, 6)$$

$$A^{-50} = PD^{-50}P^{-1}$$

12) Si

$$A = \begin{pmatrix}4 & 1 & 0 & 1\\2 & 3 & 0 & 1\\-2 & 1 & 2 & -3\\2 & -1 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

(a) Encontrar los valores y vectores propios de A.

(b) Calcular A^{-30}

13) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix}5 & b & -b\\a & -3 & 4\\a & -1 & 2\end{pmatrix}$$

cuyos valores propios satisfacen la ecuación $\lambda^3 - B\lambda^2 - 7\lambda + C = 0, B > 0, C > 0$. El vector $\bar{x} = t(1, 0, -1)^T$ es el vector propio de A asociado a $\lambda < 0$.

(a) Encontrar los valores y vectores propios de A^{-1}.

(b) Calcular A^{30}

Rpta:

$$a = 4,\ b = -7 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 7 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a)

$$B = 4,\ C = 10$$

$$A: \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 5,\ \lambda_3 = -2$$

$$\bar{x}_1 = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0, \bar{x}_2 = r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, r \neq 0, \bar{x}_3 = m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, m \neq 0$$

$$A^{-1}: \quad \lambda_1^{-1} = 1,\ \lambda_2^{-1} = \frac{1}{5},\ \lambda_3^{-1} = -\frac{1}{2}$$

(b)

$$A^{30} = PD^{30}P^{-1}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \text{diag}(1, 5, -2)$$

14) Sea B una matriz cuadrada de orden 3, no singular, tal que

$$B^{-1} = F_{31}(1)F_3(\frac{1}{2})F_{12}(1)F_{21}F_1(\frac{1}{3})F_{13}(-1)F_{32}(-2)$$

y

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ 6 & -3 & -8 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Si $A = B + C$

(a) Encontrar los valores y vectores propios de A.

(b) Calcular A^{-50}.

8.7 Valores y vectores propios de una matriz simétrica

Las matrices simétricas poseen varias propiedades importantes. Por ejemplo:

1) Los valores propios de una matriz real simétrica son siempre reales.

2) Los vectores propios asociados son reales y L.I.

   (a) Los vectores propios asociados a valores propios diferentes son mutuamente ortogonales.

   (b) Los vectores propios asociados a valores propios que se repiten son L.I.

Ejemplo 8.24

Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

es una matriz simétrica. Calcular los valores y vectores propios de A.

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

1) $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -1$

$$\lambda_1 = 3 \to \bar{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ tal que } A\bar{x}_1 = \lambda_1 \bar{x}_1$$

$$(A - \lambda_1 I)\bar{x}_1 = \bar{0}$$

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E \Rightarrow x_1 - x_2 = 0$$

$$x_2 = t,\ x_1 = x_2 = t \Rightarrow \bar{x}_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} - \{0\}$$

2) $\lambda_2 = -1$ entonces

$$\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{tal que} \quad A\bar{x}_2 = \lambda_2 \bar{x}_2$$

$$(A-\lambda_2 I)\bar{x}_2=\bar{0}$$

$$(A-\lambda_2 I)=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=E\Rightarrow x_1+x_2=0$$

$$x_2=r,\ x_1=-x_2=-r\Rightarrow\bar{x}_2=r\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix},r\in\mathbb{R}-\{0\}$$

Observamos que $\lambda_1\neq\lambda_2$ entonces $\{\bar{x}_1,\bar{x}_2\}$ es ortogonal.

Ejemplo 8.25

Si

$$A=\begin{pmatrix}0.6 & 0.8\\ 0.8 & -0.6\end{pmatrix}$$

encontrar los valores y vectores propios de A.

$$A=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}6 & 8\\ 8 & -6\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}=\frac{1}{5}B$$

B es matriz simétrica entonces A es matriz simétrica.

$$P(\lambda)=|B-\lambda I|=\begin{vmatrix}3-\lambda & 4\\ 4 & -3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-25=0\Rightarrow\lambda_1=5,\ \lambda_2=-5$$

1) $\lambda_1=5$ entonces

$$\bar{x}_1=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\quad\text{tal que } B\bar{x}_1=\lambda_1\bar{x}_1$$

$$(B-\lambda_1 I)=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 4 & -8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}=E\Rightarrow x_1-2x_2=0$$

$$x_2=t,\ x_1=2x_2=2t\Rightarrow\bar{x}_1=t\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix},t\in\mathbb{R}-\{0\}$$

2) $\lambda_2=-5$ entonces

$$\bar{x}_2=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\quad\text{tal que}\quad B\bar{x}_2=\lambda_2\bar{x}_2$$

$$(B-\lambda_2 I)=\begin{pmatrix}8 & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 0 & 0\end{pmatrix}=E\Rightarrow x_1+\frac{1}{2}x_2=0$$

$$x_2=r,\ x_1=-\frac{1}{2}x_2=-\frac{1}{2}r$$

entonces

$$\bar{x}_2=r\begin{pmatrix}-1/2\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow \bar{x}_2=r\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix},r\neq 0$$

Los valores propios de A son:

$$\lambda_1'=\frac{1}{5}(5)=1,\ \lambda_2'=\frac{1}{5}(-5)=-1 \text{ y } \bar{x}_1'=t\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix},\ \bar{x}_2'=r\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$$

Observamos que $\lambda_1'\neq\lambda_2'$ y $\{\bar{x}_1,\bar{x}_2\}$ es ortogonal.

Ejemplo 8.26

Si

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 0 & 2\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

es una matriz simétrica, encontrar los valores y vectores propios de A.

$$P(\lambda)=|A-\lambda I|=-(\lambda-8)(\lambda-1)^2=0\Rightarrow\lambda_1=8,\ \lambda_2=\lambda_3=-1$$

1) $\lambda_1=8$ entonces

$$\bar{x}_1=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\quad \text{tal que } A\bar{x}_1=\lambda_1\bar{x}_1$$

$$(A-\lambda_1 I)=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 4\\ 2 & -8 & 2\\ 4 & 2 & -5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -4 & 1\\ 0 & 1 & -1/2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=E$$

$$x_3 = t,\ x_2 = \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2}t,\ x_1 = 4x_2 - x_3 = 2t - t = t \Rightarrow \bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} - \{0\}$$

2) $\lambda_2 = -1$ entonces

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{tal que} \quad A\bar{x} = \lambda_2\bar{x}$$

$$(A - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E \Rightarrow x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 0$$

$$x_3 = r,\ x_2 = m,\ x_1 = -\frac{1}{2}x_2 - x_3 = -\frac{1}{2}m - r$$

$$S = \{-\frac{1}{2}m - r, m, r\},\ m, r \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\bar{x} = r\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, r, m \neq 0$$

$$\bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \bar{x}_3 = m\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \{\bar{x}_1, \bar{x}_2\} \text{ es ortogonal}$$
$$\lambda_1 \neq \lambda_3 \Rightarrow \{\bar{x}_1, \bar{x}_3\} \text{ es ortogonal}$$
$$\lambda_2 = \lambda_3 \Rightarrow \{\bar{x}_2, \bar{x}_3\} \text{ es L.I.}$$

Conclusión: $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$ es L.I.

8.8 Ejercicios propuestos

1) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

Encontrar los valores y vectores propios de A.

Rpta: $$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \frac{17}{12},\ \lambda_3 = \frac{7}{12}$$

$$\bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix},\ \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, r \neq 0,\ \bar{x}_3 = m\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, m \neq 0$$

2) Encontrar los valores y vectores propios de A^{-1}, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

3) Si los valores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & d & 0 \\ d & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

son 1 y 2 (de multiplicidad 2) y un vector propio asociado a 1 es $\bar{x}_1 = t(1,0,0)^T, t \neq 0$, determinar A y los valores y vectores propios de A.

Rpta: $$a = 1, b = 2, c = 2, d = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 2$$

$$\bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \neq 0,\ \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, r \neq 0,\ \bar{x}_3 = m\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, m \neq 0$$

4) Si los valores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

con 1 y 5 (multiplicidad 2) y un vector propio asociado a 1 es $\bar{x}_1 = r(1,0,0)^T, r \neq 0$. Calcular A y los valores y vectores propios de A^{-1}

5) Encontrar los valores y vectores propios de $f(A) = A^3 - 64A^{-2} + A$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Rpta: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 8$

$$\bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0,\ \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, r \neq 0,\ \bar{x}_3 = m\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, m \neq 0$$

$$f(\lambda_1) = f(\lambda_2) = -68,\ f(\lambda_3) = 8^3 + 7 = 519$$

6) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} b & a & c \\ a & 0 & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

los valores característicos de A satisfacen la ecuación $\lambda^3 - 6\lambda^2 + t\lambda - 8 = 0$ y una de las raíces tiene multiplicidad 2. Los valores propios de A^{-1} son $\lambda_1 = \frac{1}{8}, \lambda_2 = -1 = \lambda_3$ y un vector propio de A^{-1} asociado a la raíz de multiplicidad 2 es $\bar{x} = (1,0,-1)^T$. Encontrar los valores y vectores propios de A y A^{-1}

7) Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ c & b & c \\ 0 & c & a \end{pmatrix}$$

una matriz no invertible donde $abc < 0, a, b, c$ enteros, $c^2 = \lambda < 2$. Los valores propios de A satisfacen la ecuación $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda + k = 0$.

Hallar los valores y vectores propios de $f(A) = 2A^3 - A^2 + 5A - 3I$

Rpta: $$a = 1,\ b = 2,\ c = -1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 0$$

$$\bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0,\ \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, r \neq 0,\ \bar{x}_3 = m\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, m \neq 0$$

$$f(\lambda_1) = 3,\ f(\lambda_2) = 57,\ f(\lambda_3) = -3$$

8.9 Diagonalización ortogonal: Matrices simétricas

Antes recordemos el concepto de matriz ortogonal.

Definición 8.8

Una matriz cuadrada A es **ortogonal** si y sólo si $A^{-1} = A^T$.

Ejemplo 8.27

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

es una matriz ortogonal puesto que

$$|A| = 1 \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Se observa que $A^{-1} = A^T$ entonces A es una matriz ortogonal.

Ejemplo 8.28

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

no es una matriz ortogonal puesto que

$$|A| = 2 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$A^{-1} \neq A^T$ entonces A no es una matriz ortogonal.

Nota

1) Si A es una matriz ortogonal entonces $A^T A = AA^T = I$

2) Si A es una matriz ortogonal de orden n entonces los vectores fila de A forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

3) Si A es una matriz ortogonal de orden n entonces los vectores columna de A forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

En el Ejemplo 8.27:

1) Los vectores fila de A son:

$$\bar{v}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ y } \bar{v}_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$
$$\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = 0 \text{ y } |\bar{v}_1| = |\bar{v}_2| = 1$$

entonces $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

2) Los vectores columna de A son:

$$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$
$$\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 = 0 \text{ y } |\bar{u}_1| = |\bar{u}_2| = 1$$

entonces $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$

Propiedades

1) A es una matriz ortogonal si y solo si $AA^T = I$

2) Si A es una matriz ortogonal, entonces A^{-1} es una matriz ortogonal.

3) Si A y B son matrices ortogonales, entonces AB es una matriz ortogonal.

4) Si A es una matriz ortogonal entonces $|A| = \pm 1$

5) Si A es una matriz ortogonal entonces los valores propios de A son ± 1

Demostración. 1) ($\Rightarrow$) Si A es una matriz ortogonal entonces $AA^T = I$.

Si $A^{-1} = A^T$ entonces $AA^T = AA^{-1} = I$

($\Leftarrow$) Si $AA^T = I$ entonces A es una matriz ortogonal.

$AA^T = I$ entonces $A^T = A^{-1}$

2) Si A es ortogonal entonces $A^{-1} = A^T$. Para d.q. A^{-1} es ortogonal

$$(A^{-1})(A^{-1})^T = A^T(A^T)^T = A^T A = A^{-1}A = I$$

luego A^{-1} es matriz ortogonal.

3) Si $A^{-1} = A^T$ y $B^{-1} = B^T$ entonces (AB) es una matriz ortogonal

$$(AB)^T = B^T A^T = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$$

luego AB es una matriz ortogonal.

4) Si $A^{-1} = A^T$ entonces

$$|A^{-1}| = |A^T|$$
$$\frac{1}{|A|} = |A|$$

luego

$$|A|^2 = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1$$

5) Si $A^{-1} = A^T$ y λ es un valor propio de A entonces

$$\frac{1}{\lambda} = \lambda \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

◇

Nota

Como una consecuencia de la Propiedad 4

1) Si $|A| = 1$ entonces A se llama **matriz ortogonal propia.**

2) Si $|A| = -1$ entonces A se llama **matriz ortogonal impropia**

Ejemplo 8.29

$$A = \begin{pmatrix} \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \\ -\frac{5}{13} & \frac{12}{13} \end{pmatrix}$$

es una matriz ortogonal propia puesto que $|A| = 1$.

Ejemplo 8.30

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

es una matriz ortogonal impropia puesto que $|A| = -1$

Consideremos el siguiente problema

Dada una matriz cuadrada A, existe una matriz ortogonal P tal que $P^{-1}AP = P^TAP = D$ donde D es una matriz diagonal.

Este problema sugiere la siguiente definición:

Definición 8.9

Una matriz cuadrada A es **diagonalizable ortogonalmente** si existe una matriz ortogonal P tal que

$$P^{-1}AP = P^TAP = D$$

Es decir, A es **diagonalizable ortogonalmente** si existe una matriz ortogonal P tal que $P^TAP = D$.

Definición 8.10

Si $P^T AP = D$ se dice que P **diagonaliza ortogonalmente** a A.

Nota

1) El problema de diagonalizar ortogonalmente una matriz nos llevará a considerar una clase muy importante de matrices, las llamadas matrices simétricas.

2) "Ortogonal" significa "ortogonal con respecto al producto interior euclidiano en $\mathbb{R}^n$ (producto escalar en $\mathbb{R}^n$)"

Teorema 8.10

Sea A una matriz cuadrada de orden n. A es diagonalizable ortogonalmente si y solo si A tiene un conjunto de n vectores propios ortonormales.

Demostración. ($\Rightarrow$) Si A es diagonalizable ortogonalmente, entonces A tiene n vectores propios ortonormales.
Si A es diagonalizable ortogonalmente entonces existe una matriz ortogonal P tal que $P^{-1}AP = D$, tal y como se demostró en el Teorema 8.6 Sección 8.3 (diagonalización de matrices) los n vectores columna de P son vectores propios de A, dado que P es ortogonal estos vectores columna son ortonormales por lo que A tiene n vectores propios ortonormales.
($\Leftarrow$) Si A tiene n vectores propios ortonormales entonces A es diagonalizable ortogonalmente.
Supongamos que A tiene un conjunto ortonormal de n vectores propios $\{\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_n\}$ (como se indicó en la demostración del Teorema 8.6). La matriz P que tiene como columnas a estos vectores propios diagonaliza a A, como estos vectores propios son ortonormales entonces P es ortogonal y por tanto $P^{-1}AP = P^T AP = D$ es decir A es diagonalizable ortogonalmente. ◇

Teorema 8.11

Toda matriz diagonalizable ortogonalmente es simétrica.

Demostración. Sea A una matriz cuadrada de orden n diagonalizable ortogonalmente entonces existe una matriz P ortogonal de orden n, tal que

$$P^T AP = D$$
$$A = PDP^T$$

entonces

$$A^T = (PDP^T)^T = PD^T P^T = PDP^T = A$$

entonces A es simétrica. ◇

Nota

El recíproco de este teorema también se verifica. Es decir, toda matriz simétrica es diagonalizable ortogonalmente (omitimos la demostración).

Regla (para diagonalizar ortogonalmente una matriz simétrica)

1) Encontrar una base con los n vectores propios de A.

2) Aplicar el Proceso de Ortogonalización de Gram-Schmidt[3] a la base para obtener una base ortonormal.

3) Formar la matriz P cuyas columnas son los vectores de la base ortonormal que se obtuvo en el paso 2. Entonces P diagonaliza ortogonalmente a A.

Ejemplo 8.31

Si

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{pmatrix}$$

diagonalizar ortogonalmente la matriz A.

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = -(\lambda + 3)(\lambda + 50)(\lambda - 25) = 0$$

[3] Jörgen Pederson Gram, matemático danés (1850–1916)
Erhard Schmidt, matemático alemán (1876–1959)

$$\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = -50,\ \lambda_3 = 25, \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = -28$$

1) $\lambda_1 = -3$ entonces

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{tal que } A\bar{x}_1 = \lambda_1 \bar{x}_1$$

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -36 \\ 0 & 0 & 0 \\ -36 & 0 & -20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -36 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E$$

$$x_3 = 0, x_2 = t, x_1 = 36x_3 = 0$$

$$\bar{x}_1 = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} - \{0\}$$

2) $\lambda_2 = -50$ entonces

$$\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{tal que} \quad A\bar{x}_2 = \lambda_2 \bar{x}_2$$

$$(A - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} 48 & 0 & -36 \\ 0 & 47 & 0 \\ -36 & 0 & 27 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E$$

$$x_3 = r,\ x_2 = 0,\ x_1 = \frac{3}{4}x_3 = \frac{3}{4}r$$

$$\bar{x}_2 = r \begin{pmatrix} 3/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x}_2 = r \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3) $\lambda_3 = 25$ entonces

$$\bar{x}_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{tal que} \quad A\bar{x}_3 = \lambda_3 \bar{x}_3$$

$$(A-\lambda_3 I)=\begin{pmatrix}-27 & 0 & -36\\ 0 & -28 & 0\\ -36 & 0 & -48\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 4/3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=E$$

$$x_3=m,\ x_2=0,\ x_1=-\frac{4}{3}x_3=-\frac{4}{3}m$$

entonces

$$\bar{x}_3=m\begin{pmatrix}-4/3\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\ \bar{x}_3=m\begin{pmatrix}-4\\ 0\\ 3\end{pmatrix},m\in\mathbb{R}-\{0\}$$

como $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3$ entonces $\{\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3\}$ es base ortogonal, es decir los tres vectores propios son mutuamente ortogonales.

$\{\bar{z}_1,\bar{z}_2,\bar{z}_3\}$ es una base ortonormal si $\bar{z}_i=\frac{\bar{x}_i}{|\bar{x}_i|}, i=1,2,3$

$$P=\begin{pmatrix}0 & 3/5 & -4/5\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 4/5 & 3/5\end{pmatrix}$$

tal que

$$P^TAP=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 3/5 & 0 & 4/5\\ -4/5 & 0 & 3/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 0 & -36\\ 0 & -3 & 0\\ -36 & 0 & -23\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 3/5 & -4/5\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 4/5 & 3/5\end{pmatrix}$$
$$=D=\text{diag}(-3,-50,25)$$

Por tanto P diagonaliza ortogonalmente a A.

Ejemplo 8.32

Si

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 0 & 2\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

diagonalizar ortogonalmente la matriz A

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 8) = 0$$
$$\lambda_1 = 8,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = -1$$

Verifica que

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = 6$$

1) $\lambda_1 = 8$ entonces

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{tal que} \quad A\bar{x}_1 = \lambda_1 \bar{x}_1$$

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E$$

$$x_3 = t,\ x_2 = \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2}t,\ x_1 = 4x_2 - x_3 = 2t - t = t$$

$$\bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} - \{0\}$$

2) $\lambda_2 = -1$ entonces

$$\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{tal que} \quad A\bar{x}_2 = \lambda_2 \bar{x}_2$$

$$(A - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E$$
$$x_2 = r,\ x_3 = m$$

entonces

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2 - x_3 = -\frac{1}{2}r - m$$

$$S = \{-\frac{1}{2}r - m, r, m\}, m \neq 0, r \neq 0$$

$$\bar{x} = r\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ es un vector propio de } A \text{ asociado a } \lambda_2 = -1$$

$$\bar{x}_3 = m\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ es un vector propio de } A \text{ asociado a } \lambda_3 = -1$$

Observamos que:

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 = 0$$
$$\lambda_1 \neq \lambda_3 \Rightarrow \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3 = 0$$
$$\lambda_2 = \lambda_3 \Rightarrow \{\bar{x}_2, \bar{x}_3\} \text{ es L.I.}$$

Para obtener la matriz P que diagonaliza ortogonalmente a A, aplicamos el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt (solo para operar tomamos los vectores como vectores fila)

$$\bar{y}_1 = \bar{x}_1 = (2,1,2)$$
$$\bar{y}_2 = \bar{x}_2 = (-1,2,0)$$
$$\bar{y}_3 = \bar{x}_3 - \frac{\bar{x}_3 \cdot \bar{y}_1}{|\bar{y}_1|^2}\bar{y}_1 - \frac{\bar{x}_3 \cdot \bar{y}_2}{|\bar{y}_2|^2}\bar{y}_2$$

Para operar los tomamos como vectores fila

$$\bar{y}_3 = (-1,0,1) - \frac{(-1,0,1)\cdot(2,1,2)}{9}(2,1,2) - \frac{(-1,0,1)\cdot(-1,2,0)}{5}(-1,2,0)$$

$$\bar{y}_3 = (-1,0,1) - 0 - \frac{1}{5}(-1,2,0) = (-\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 1)$$

$$\bar{y}_3 = (-4,-2,5)$$

$\{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3\}$ es una base ortogonal de los vectores propios de A

$\{\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3\}$ es una base ortonormal de los vectores propios de A donde

$$\bar{z}_i = \frac{\bar{y}_i}{|\bar{y}_i|}, \ i = 1, 2, 3 \quad \text{(vectores unitarios)}$$

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/\sqrt{5} & -4/3\sqrt{5} \\ 1/3 & 2/\sqrt{5} & -2/3\sqrt{5} \\ 2/3 & 0 & 5/3\sqrt{5} \end{pmatrix} \qquad \text{tal que } P^T A P = D$$

Comprobando:

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ -4/3\sqrt{5} & -2/3\sqrt{5} & 5/3\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & -1/\sqrt{5} & -4/3\sqrt{5} \\ 1/3 & 2/\sqrt{5} & -2/3\sqrt{5} \\ 2/3 & 0 & 5/3\sqrt{5} \end{pmatrix}$$
$$= D = \text{diag}(8, -1, -1)$$

8.10 Ejercicios propuestos

1) Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Encontrar P que diagonalice ortogonalmente a A.

(b) Usando el resultado en a). Calcular $4A^{-1}$

Rpta:

(a) $$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -1/2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & 1/2 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & 1/2 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2\sqrt{3}} & 1/2 \end{pmatrix}$$

(b) $A^{-1} = \frac{1}{4}A$

2) A es una matriz de orden 3×4 y

$$AA^T = \begin{pmatrix} 3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 3 \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio característico es

$$P(\lambda) = -(\lambda^3 - 6\lambda^2 + mx - 8) \text{ tal que } (AA^T)\bar{x} = (16, 8, 16)^T.$$

Diagonalizar ortogonalmente $(AA^T)^{-1}$

3) Si A es una matriz cuadrada de orden 3 tal que

$$F_{23}(-6)F_{23}F_3(\frac{1}{20})F_{32}(-1)F_{13}(2)F_{12}(2)F_{21}(2)A = \begin{pmatrix} 1 & 10 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Diagonalizar ortogonalmente la matriz A.

Rpta:
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 5,\ \lambda_3 = 8$$

$$\bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \neq 0,\ \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, r \neq 0,\ \bar{x}_3 = m\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, m \neq 0$$

$$P^T = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$P^TAP = D = \text{diag}(2, 5, 8)$$

4) Si

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

diagonalizar ortogonalmente la matriz A.

5) (a) Encontrar los valores y vectores propios de $f(A) = 8A^4 - A^{-3} + A^T - 8I$ si

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) Diagonalizar ortogonalmente la matriz A, si es posible

Rpta:

(a) $$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 8$$

$$\bar{x}_1 = t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, t \neq 0, \bar{x}_2 = r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r \neq 0, \bar{x}_3 = m \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, m \neq 0$$

$$f(\lambda_1) = f(\lambda_2) = 0,\ f(\lambda_3) = \frac{8^8 - 1}{8^3}$$

(b) $$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$P^T AP = D = \text{diag}(-1, -1, 8)$$

6) Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & 0 & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

una matriz invertible, $b > 0$, cuyos valores propios satisfacen la ecuación $\lambda^3 - 6\lambda^2 + t\lambda - 8 = 0$ donde una de las raíces tiene multiplicidad 2. Los valores propios de $(\frac{1}{8}A)^{-1}$ son $\lambda_1 = \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 8$. Un vector propio de A^{-1} asociado a la raíz de multiplicidad es $\bar{x} = t(1, 0, -1)^T, t \neq 0$

(a) Encontrar los valores y vectores propios de A.

(b) Calcular A^{-20}.

7) (a) A partir de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 \\ 2 & 5 & -2 \\ 6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

encontrar una matriz simétrica B.

(b) Diagonalizar ortogonalmente la matriz B.

$$B = A + A^T, \quad C = \frac{1}{2}B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Rpta: $C: \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 10$

$$\bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ \bar{x}_3 = m\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$P^T CP = D = \text{diag}(1, 1, 10)$$

$$P^T BP = D = \text{diag}(2, 2, 20)$$

8.11 Matrices complejas especiales

Hasta ahora hemos tratado principalmente con matrices reales, es decir, matrices cuyos elementos son reales. Sin embargo, existen algunas matrices complejas especiales, las mismas que servirán para probar un conjunto de teoremas relacionados con matrices reales simétricas.

Definición 8.11

Una matriz A de orden $n \times m$ se llama **matriz compleja** si sus elementos son números complejos

Ejemplo 8.33

$$A = \begin{pmatrix} 3-i & -1 & i \\ 2i & 4+5i & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \\ -i & 1+i \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2i \\ 4i & 1 & 3+i \\ -3 & 2+4i & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Nota

Puesto que todo número real es un número complejo entonces toda matriz real es una matriz compleja.

Definición 8.12

Si A es una matriz compleja, se llama **conjugada de la matriz** A y se denota por $\overline{A}$, a la matriz que se obtiene de reemplazar cada elemento $z = a + bi$ por su conjugado $\overline{z} = a - bi$

Ejemplo 8.34

Si consideramos las matrices del Ejemplo 8.33

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 3+i & -1 & -i \\ -2i & 4-5i & 0 \end{pmatrix} \qquad \overline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \\ i & 1-i \end{pmatrix}$$

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2i \\ -4i & 1 & 3-i \\ -3 & 2-4i & 0 \end{pmatrix} \qquad \overline{D} = D$$

Propiedades

1) A es una matriz real si y solo si $A = \overline{A}$

2) $\overline{\overline{A}} = A$

3) $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$

4) $(\overline{A})^T = (\overline{A^T})$

Demostración. La prueba de las propiedades 1 y 2 son inmediatas.

3) Dos matrices son iguales si tienen el mismo orden y los elementos correspondientes son iguales. Entonces:

   (a) Sean

$$A = (a_{ik})_{m\times p} \qquad B = (b_{kj})_{p\times n}$$
$$\overline{A} = (\overline{a_{ik}})_{m\times p} \qquad \overline{B} = (\overline{b_{kj}})_{p\times n}$$

$$A_{m\times p}B_{p\times n} \Rightarrow (\overline{AB})_{m\times n} \qquad \overline{A}_{m\times p}\overline{B}_{p\times n} \Rightarrow (\overline{A}\overline{B})_{m\times n}$$

   $\overline{AB}$ y $\overline{A}\,\overline{B}$ tienen el mismo orden

   (b) Demostraremos que los correspondientes elementos son iguales

$$AB = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = (c_{ij}) = C \tag{8.4}$$

$$\overline{AB} = \overline{\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}} = \sum_{k=1}^{p} \overline{a_{ik}b_{kj}} = \sum_{k=1}^{p} \overline{a_{ik}}\,\overline{b_{kj}} \tag{8.5}$$

$$\overline{A}\,\overline{B} = \sum_{k=1}^{p} \overline{a_{ik}}\,\overline{b_{kj}} \tag{8.6}$$

   Por lo tanto $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$.

4) $(\overline{A})^T = (\overline{A^T})$

   Sea $A = (a_{ij})_{m\times n} \Rightarrow A^T = (a_{ji})_{n\times m}$

$$\overline{A} = (\overline{a_{ij}})_{m\times n} \Rightarrow (\overline{A})^T = (\overline{a_{ji}})_{n\times m} \tag{8.7}$$

$$A^T = (a_{ji})_{n\times m} \Rightarrow \overline{(A^T)} = (\overline{a_{ji}})_{n\times m} \tag{8.8}$$

   De (8.7) y (8.8) se deduce que $(\overline{A})^T = (\overline{A^T})$

◇

Nota

La transpuesta de la matriz conjugada de A se denota por A^*.
Es decir $A^* = (\overline{A})^T$

Ejemplo 8.35

Si

$$A = \begin{pmatrix} 3i & -2 & 3-5i \\ 1+i & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\overline{A})^T = \begin{pmatrix} -3i & -2 & 3+5i \\ 1-i & -i & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -3i & 1-i \\ -2 & -i \\ 3+5i & 0 \end{pmatrix} = A^*$$

$$\overline{(A^T)} = \overline{\begin{pmatrix} 3i & 1+i \\ -2 & i \\ 3-5i & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -3i & 1-i \\ -2 & -i \\ 3+5i & 0 \end{pmatrix} = A^*$$

Propiedades

1) $(\overline{A})^* = \overline{(A^*)}$

2) $(A^*)^* = A$

3) $(rA)^* = rA^*, \ \forall r \in \mathbb{R}$

4) $(A+B)^* = A^* + B^*$

5) $(AB)^* = B^*A^*$

Demostración.

1)

$$(\overline{A})^* = (\overline{\overline{A}})^T = A^T \tag{8.9}$$

$$\overline{(A^*)} = \overline{(\overline{A})^T} = \overline{(\overline{A^T})} = A^T \tag{8.10}$$

De (8.9) y (8.10) se deduce que $(\overline{A})^* = \overline{(A^*)}$

2) D.q. $(A^*)^* = A$

$$(A^*)^* = (\overline{A^*})^T = ((\overline{A})^*)^T = ((\overline{\overline{A}})^T)^T = (A^T)^T = A$$

3) $(rA)^* = (\overline{rA})^T = (r\overline{A})^T = r(\overline{A})^T = rA^*;\ \forall r \in \mathbb{R}.$

4) D.q. $(A+B)^* = A^* + B^*$

$$(A+B)^* = (\overline{A+B})^T = (\overline{A}+\overline{B})^T = (\overline{A})^T + (\overline{B})^T = A^* + B^*$$

5) $(AB)^* = (\overline{AB})^T = (\overline{A}\,\overline{B})^T = \overline{B}^T\overline{A}^T = B^*A^*$

◇

Definición 8.13

Sea A una matriz cuadrada de orden n. A se llama **matriz hermitiana** si y solo si $A = A^*$.
Es decir A es hermitiana si y solo si $(a_{ij}) = (\overline{a_{ji}})\ \forall i, j$

Nota

En una matriz hermitiana los elementos de la diagonal principal son números reales puesto que $a_{ii} = \overline{a_{ii}}\ \forall i$, si y solo si los a_{ii} son números reales.

Ejemplo 8.36

$$A = \begin{pmatrix} 3 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & -5i \\ 1+i & 3 & 2-3i \\ 5i & 2+3i & 4 \end{pmatrix}$$

son matrices hermitianas puesto que:

$$A^* = (\overline{A})^T = \begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$B^* = (\overline{B})^T = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 5i \\ 1-i & 3 & 2+3i \\ -5i & 2-3i & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & -5i \\ 1+i & 3 & 2-3i \\ 5i & 2+3i & 4 \end{pmatrix} = B$$

Nota

Toda matriz hermitiana se puede expresar como $C + Di$ donde C es una matriz real simétrica y D es una matriz real antisimétrica. En efecto:
Sea $A = (a_{ij})_n$ una matriz hermitiana donde $a_{ij} = c_{ij} + id_{ij}$
Si $A = A^*$ entonces

$$A = (\overline{A})^T = (c_{ij} - id_{ij})^T = c_{ji} - id_{ji}$$
$$a_{ij} = c_{ij} + id_{ij} = c_{ji} - id_{ji}$$
$$\begin{cases} c_{ij} = c_{ji} \Rightarrow C = C^T \\ d_{ij} = -d_{ji} \Rightarrow D = -D^T \end{cases}$$

Veamos en el Ejemplo 8.36

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = C + iD$$

donde C es simétrica y D antisimétrica.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} = C + iD$$

donde C es simétrica y D es antisimétrica

Propiedades

1) Si A es una matriz hermitiana entonces rA es hermitiana para todo $r \in \mathbb{R}$.

2) Toda matriz real simétrica es una matriz hermitiana.

3) Si A es una matriz cuadrada de orden n entonces $(A + A^*)$ es hermitiana.

Demostración. 1) D.q. Si $A = A^*$ entonces $rA = (rA)^*; \forall r \in \mathbb{R}$.

$$(rA)^* = (rA^*)^* = r(A^*)^* = rA; \ \forall r \in \mathbb{R}$$

entonces rA es hermitiana.

2) D.q. si $A = A^T$ entonces $A = A^*$

$$A^* = (\overline{A})^T = \overline{(A^T)} = \overline{A} = A$$

puesto que A es una matriz real.

3) D.q. Si A_n entonces $(A + A^*) = (A + A^*)^*$

$$(A + A^*)^* = A^* + (A^*)^* = A^* + A = A + A^* \Rightarrow A + A^*$$

es una matriz hermitiana.

<

Definición 8.14

Sea A una matriz cuadrada de orden n. A se llama **matriz anti-hermitiana** si y solo si $A = -A^*$. Es decir A es anti-hermitiana si y solo si $(a_{ij}) = -(\overline{a_{ji}})$; $\forall i, j$

Nota

En una matriz anti-hermitiana los elementos de la diagonal principal son ceros y/ números imaginarios puros. En efecto,
Sea $A = (a_{ij})$ una matriz anti-hermitiana donde $a_{ij} = c_{ij} + i d_{ij}$ entonces $A = -A^* = -(\overline{A})^T$.
Como los elementos de la diagonal principal de A y $-(\overline{A})^T$ son iguales entonce

$$c_{ii} + i d_{ii} = -(c_{ii} - i d_{ii}) \Rightarrow \begin{cases} c_{ii} = -c_{ii} \Rightarrow 2c_{ii} = 0 \Rightarrow c_{ii} = 0 \\ d_{ii} = d_{ii} \end{cases}$$

luego hemos verificado que los elementos de la diagonal principal de una matr anti-hermitiana son cero y/o números imaginarios puros.

Ejemplo 8.37

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1-2i \\ -1-2i & 3i \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5+i \\ -1 & 0 & 8i \\ -5+i & 8i & 0 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} i & 4 \\ -4 & -7i \end{pmatrix}$$

son matrices anti-hermitianas puesto que:

$$A^* = (\overline{A})^T = \begin{pmatrix} 0 & 1+2i \\ -1+2i & -3i \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & -1+2i \\ 1+2i & -3i \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 0 & 1-2i \\ -1-2i & 3i \end{pmatrix} = -A$$

$$B^* = (\overline{B})^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5-i \\ -1 & 0 & -8i \\ -5-i & -8i & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -5-i \\ 1 & 0 & -8i \\ 5-i & -8i & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5+i \\ -1 & 0 & 8i \\ -5+i & 8i & 0 \end{pmatrix} = -B$$

$$M^* = (\overline{M})^T = \begin{pmatrix} -i & 4 \\ -4 & 7i \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -i & -4 \\ 4 & 7i \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} i & 4 \\ -4 & -7i \end{pmatrix} = -M$$

Nota

Toda matriz anti-hermitiana se puede expresar como $C + Di$, donde C es una matriz real antisimétrica y D es una matriz real simétrica. En efecto:

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz anti-hermitiana donde $a_{ij} = c_{ij} + id_{ij}$

Si $A = -A^*$ entonces

$$A = -(\overline{A})^T = -(c_{ij} - id_{ij})^T = -(c_{ji} - id_{ji}) = -c_{ji} + id_{ji}$$

$$(a_{ij}) = c_{ij} + id_{ij} = -c_{ji} + id_{ji} \Rightarrow \begin{cases} c_{ij} = -c_{ji} & \Rightarrow C = -C^T \\ d_{ij} = d_{ji} & \Rightarrow D = D^T \end{cases}$$

Veamos en el Ejemplo 8.37

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = C + iD$$

donde C es antisimétrica y D es simétrica

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \\ 1 & 8 & 0 \end{pmatrix} = C + iD$$

donde C es antisimétrica y D es simétrica

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} = C + iD$$

donde C es una matriz real antisimétrica y D es una matriz real simétrica

Propiedades

1) Si A es una matriz anti-hermitiana, entonces rA es una matriz anti-hermitiana para todo $r \in \mathbb{R}$.

2) Toda matriz real anti-simétrica es una matriz anti-hermitiana.

3) Si A es una matriz cuadrada de orden n entonces $(A - A^*)$ es una matriz anti-hermitiana.

Demostración.

1) D.q. si $A = -A^*$ entonces $rA = -(rA)^*, \forall r \in \mathbb{R}$

$$(rA)^* = (r(-A)^*)^* = -r(A^*)^* = -rA$$

entonces rA es anti-simétrica.

2) D.q. si $A = -A^T$ entonces $A = -A^*$

$$A^* = (\overline{A})^T = (\overline{A^T}) = (\overline{-A}) = -\overline{A} = -A$$

puesto que A es una matriz real.

3) D.q. si A_n entonces $A - A^* = -(A - A^*)^*$

$$(A - A^*)^* = A^* - (A^*)^* = A^* - A = -(A - A^*) \Rightarrow A - A^*$$

es una matriz anti-hermitiana.

◇

Nota

Una consecuencia inmediata de las propiedades de la matrices hermitianas y anti-hermitianas es que: "Toda matriz cuadrada A de orden n se puede expresar como la suma de una matriz hermitiana y otra antihermitiana". Veamos

Si A es una matriz cuadrada de orden n entonces

$A + A^*$ es una matriz hermitiana

$A - A^*$ es una matriz anti-hermitiana

entonces

$$\frac{1}{2}(A + A^*) + \frac{1}{2}(A - A^*) = A$$

Teorema 8.12

Si A es una matriz cuadrada de orden n entonces AA^* es una matriz hermitiana.

Demostración. Se debe demostrar que $AA^* = (AA^*)^*$

$$(AA^*)^* = (A^*)^* A^* = AA^*$$

luego AA^* es una matriz hermitiana ◇

8.12 Valores y vectores propios de una matriz hermitiana

Teorema 8.13

Si A es una matriz hermitiana entonces los valores propios de A son reales.

Demostración. Sean A una matriz hermitiana y λ un valor propio cualquiera de A asociado a λ, entonces

$$
\begin{aligned}
A\bar{x} &= \lambda\bar{x} \\
A\bar{x} - \lambda\bar{x} &= 0 \\
\bar{x}^*(A\bar{x} - \lambda\bar{x}) &= \bar{x}^*0 = 0 \\
\bar{x}^*A\bar{x} - \lambda\bar{x}^*\bar{x} &= 0
\end{aligned}
$$

entonces

$$\lambda = \frac{\bar{x}^*A\bar{x}}{\bar{x}^*\bar{x}}$$

donde $\bar{x}^*\bar{x} = (\bar{\bar{x}})^T\bar{x}$ es un número real diferente de cero, puesto que $\bar{x} \neq \bar{0}$ es un vector propio de A. Además

$$\bar{x}^*A\bar{x} = \bar{x}^*A^*\bar{x}$$

ya que $A = A^*$ por hipótesis

$$
\begin{aligned}
&= (\bar{x}^*A\bar{x})^* \\
&= \overline{\bar{x}^*A\bar{x}}
\end{aligned}
$$

($\bar{x}^*A\bar{x}$ es una matriz con un solo elemento)
esto es $\bar{x}^*A\bar{x}$ es igual a su conjugado y por tanto es real.
En consecuencia, λ es el cociente de dos números reales y es real. ◇

Teorema 8.14

Si A es una matriz real simétrica, entonces los valores propios de A son reales.

Demostración. Como toda matriz real simétrica es una matriz hermitiana entonces por el Teorema 8.13 queda demostrado que los valores propios de una matriz simétrica son reales. ◇

Definición 8.15

Dos vectores propios complejos $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ son **ortogonales** si y solo si $\bar{x}_1^*\bar{x}_2 = 0$

Ejemplo 8.38

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} -2i \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 3i \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_1^*\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 2i & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3i \\ 2 \end{pmatrix} = -6 + 6 = 0$$

entonces $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ son ortogonales

Teorema 8.15

Si A es una matriz hermitiana entonces los vectores propios de A asociados con valores propios diferentes son vectores mutuamente ortogonales.

Demostración. Sea A una matriz hermitiana y sean $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ vectores propios de A asociados a dos valores propios diferentes λ_1 y λ_2 respectivamente. Es decir

$$A\bar{x}_1 = \lambda_1\bar{x}_1 \text{ y } A\bar{x}_2 = \lambda_2\bar{x}_2 \text{ donde } \lambda_1 \neq \lambda_2$$

multiplicando ambos lados de la primera ecuación por $\bar{x}_2^*$

$$\bar{x}_2^*(\lambda_1\bar{x}_1) = \bar{x}_2^*(A\bar{x}_1)$$
$$\lambda_1(\bar{x}_2^*\bar{x}_1) = \bar{x}_2^*A\bar{x}_1$$

puesto que $A = A^*$

$$= \bar{x}_2^*A^*\bar{x}_1$$
$$= (A\bar{x}_2)^*\bar{x}_1$$
$$= (\lambda_2\bar{x}_2)^*\bar{x}_1$$

$$= (\lambda_2\bar{x}_2^*)\bar{x}_1$$
$$= \lambda_2(\bar{x}_2^*\bar{x}_1)$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\bar{x}_2^*\bar{x}_1) = 0 \Longleftrightarrow \bar{x}_2^*\bar{x}_1 = 0$$

puesto que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, por tanto $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ son vectores propios ortogonales. ◇

Teorema 8.16

Si A es una matriz real simétrica entonces los vectores propios de A asociados con valores propios diferentes son mutuamente ortogonales.

Demostración. Ya que toda matriz real simétrica es una matriz hermitiana, entonces por el Teorema 8.15 queda probado que los vectores propios asociados a valores propios diferentes son mutuamente ortogonales. ◇

Ejemplo 8.39

Verificar los Teoremas 8.13 y 8.15 para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^* = (\overline{A})^T = \begin{pmatrix} 0 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix} = A$$

A es una matriz hermitiana

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1+i \\ 1-i & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = 2$$

Se verifica el Teorema 8.13, puesto que los valores propios de A son reales

1) $\lambda_1 = -1$ entonces

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ tal que } A\bar{x}_1 = \lambda_1\bar{x}_1$$

$$(A-\lambda_1 I)=\begin{pmatrix}1 & 1+i\\ 1-i & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1+i\\ 0 & 0\end{pmatrix}=E\Rightarrow x_1+(1+i)x_2=0$$

$$x_2=t,\ x_1=-(1+i)x_2=(-1-i)t\Rightarrow \bar{x}_1=t\begin{pmatrix}-1-i\\ 1\end{pmatrix}, t\in\mathbb{R}-\{0\}$$

2) $\lambda_2=2$ entonces

$$\bar{x}_2=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\ \text{tal que } A\bar{x}_2=\lambda_2\bar{x}_2$$

$$(A-\lambda_2 I)=\begin{pmatrix}-2 & 1+i\\ 1-i & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & \frac{-1-i}{2}\\ 1-i & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & \frac{-1-i}{2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}=E$$

luego

$$x_1+(\frac{-1-i}{2})x_2=0$$

$$x_2=r,\ x_1=\frac{1+i}{2}x_2=(\frac{1+i}{2})r$$

entonces

$$\bar{x}_2=r\begin{pmatrix}\frac{1+i}{2}\\ 1\end{pmatrix}, r\in\mathbb{R}-\{0\}$$

$$\bar{x}_2=r\begin{pmatrix}1+i\\ 2\end{pmatrix}, r\in\mathbb{R}-\{0\}$$

Los valores propios de A son diferentes entonces los vectores propios de A asociados deben ser ortogonales. Veamos

$$\bar{x}_2^*\bar{x}_1=(\overline{\bar{x}_2})^T\bar{x}_1=\begin{pmatrix}1-i\\ 2\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}-1-i\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-i & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1-i\\ 1\end{pmatrix}$$

$$=-2+2=0$$

Queda probado que a valores propios diferentes de una matriz hermitiana los vectores propios asociados son mutuamente ortogonales.

Ejemplo 8.40

Verificar los teoremas 8.14 y 8.16 para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A es una matriz real simétrica puesto que $A = A^T$

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)\lambda(\lambda - 4) = 0$$

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 4$$

Se verifica el Teorema 8.14 puesto que los valores propios de una matriz rea simétrica son números reales

$$\lambda_1 = 0 \Rightarrow \bar{x}_1 = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \neq 0$$

$$\lambda_2 = 1 \Rightarrow \bar{x}_2 = r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r \neq 0$$

$$\lambda_3 = 4 \Rightarrow \bar{x}_3 = m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, m \neq 0$$

$$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 = 0$$

$$\bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 = 0$$

$$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3 = 0$$

Queda confirmado que a valores propios diferentes de una matriz real simétric los vectores propios asociados son mutuamente ortogonales (Teorema 8.16)

Teorema 8.17

Si $\bar{x}$ es un vector propio unitario asociado al valor propio λ de A entonces $\bar{x}^T A\bar{x} = (\lambda)$

Demostración. Si $\bar{x}$ es un vector propio unitario asociado al valor propio λ de A entonces

$$
\begin{aligned}
A\bar{x} &= \lambda\bar{x} \text{ donde } |\bar{x}| = 1 \\
\bar{x}^T A\bar{x} &= \bar{x}^T(\lambda\bar{x}) \\
&= \lambda(\bar{x}^T\bar{x}) \\
&= (\lambda) \text{ puesto que } \bar{x}^T\bar{x} = 1
\end{aligned}
$$



Teorema 8.18

Si λ es un valor propio de A entonces $\bar{\lambda}$ es un valor propio de A^*.

Demostración. Sea $\bar{x}$ un vector unitario asociado con el valor propio λ de A, de acuerdo al Teorema 8.17:

$$
\begin{aligned}
\bar{x}^T A\bar{x} &= (\lambda) \\
(\bar{x}^T A\bar{x})^* &= (\lambda)^* \\
(\overline{\bar{x}^T A\bar{x}})^T &= (\bar{\lambda})^T \\
(\overline{\bar{x}^T}\,\overline{A\bar{x}})^T &= (\bar{\lambda})^T \\
(\bar{\bar{x}})^T A^*\bar{\bar{x}} &= (\bar{\lambda})
\end{aligned}
$$

entonces $\bar{\lambda}$ es un valor propio de A^*. Por consiguiente los valores propios de A^* son los conjugados de los valores propios de A. ◇

Ejemplo 8.41

Encontrar los valores y vectores propios de

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 17 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

y A^*

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 17 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 41 = 0$$

entonces $\lambda = 4 \pm 5i$

1) $\lambda_1 = 4 + 5i$ entonces

$$\bar{x}_1 = t \begin{pmatrix} -3-5i \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} - \{0\}$$

2) $\lambda_2 = 4 - 5i$ entonces

$$\bar{x}_2 = r \begin{pmatrix} -3+5i \\ 2 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$A^* = (\overline{A})^T = \begin{pmatrix} 7 & 17 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 17 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = |A^* - \lambda I| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 \\ 17 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 41 = 0$$

entonces $\lambda = 4 \pm 5i$

$$\lambda_1^* = 4 - 5i = \bar{\lambda}_1 \qquad \lambda_2^* = 4 + 5i = \bar{\lambda}_2$$

(Se verifica el Teorema 8.18)

(a) $\lambda_1^* = 4 - 5i$ entonces

$$\bar{x}_1^* = k \begin{pmatrix} 3-5i \\ 17 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

(b) $\lambda_2^* = 4 + 5i$ entonces

$$\bar{x}_2^* = m \begin{pmatrix} 3+5i \\ 17 \end{pmatrix}, m \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Ejemplo 8.42

Encontrar los valores y vectores propios de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{pmatrix}$$

y A^*

1)

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1-i \\ 1+i & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$$

entonces $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$

Si $\lambda_1 = 1$ entonces

$$\bar{x}_1 = t \begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Si $\lambda_2 = 4$ entonces

$$\bar{x}_2 = r \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Comprobando el Teorema 8.17

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \end{pmatrix}, \ |\bar{x}_1| = \sqrt{1-2i}$$

entonces $\frac{\bar{x}_1}{|\bar{x}_1|}$ es un vector unitario.

$$\bar{x}_1^T A \bar{x}_1 = \frac{1}{(\sqrt{1-2i})^2} \begin{pmatrix} -1+i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \end{pmatrix} = (1) = (\lambda_1)$$

$$\bar{x}_2^T A \bar{x}_2 = \frac{1}{(\sqrt{4-2i})^2} \begin{pmatrix} 1-i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \end{pmatrix} = (4) = (\lambda_2)$$

2)

$$A^* = (\bar{A})^T = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{pmatrix} = A \text{ (A matriz hermitiana)}$$

$$P(\lambda) = |A^* - \lambda I| = 0$$

entonces

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 4$$
$$\lambda_1^* = 1 = \bar{\lambda}_1, \qquad \lambda_2^* = 4 = \bar{\lambda}_2$$

(a) $\lambda_1^* = 1$ entonces

$$\bar{x}_1^* = k \begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

(b) $\lambda_2^* = 4$ entonces

$$\bar{x}_2^* = m \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \end{pmatrix}, m \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Comprobando el Teorema 8.18

$$(\overline{x}_1)A^*\overline{x}_1 = \frac{1}{(\sqrt{1-2i})^2} \begin{pmatrix} -1+i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= (1) = (\bar{\lambda}_1) = \lambda_1^*$$
$$(\overline{x}_2)A^*\overline{x}_2 = \frac{1}{(\sqrt{4-2i})^2} \begin{pmatrix} 1-i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$= (4) = (\bar{\lambda}_2) = \lambda_2^*$$

Definición 8.16

Una **matriz unitaria** A es una matriz compleja tal que $A^* = A^{-1}$.

Ejemplo 8.43

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{3-2i}{\sqrt{26}} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{-3+2i}{\sqrt{26}} \end{pmatrix}$$

D.q. A es unitaria.

En efecto:

$$A^* = (\overline{A})^T = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{3+2i}{\sqrt{26}} & \frac{-3-2i}{\sqrt{26}} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

puesto que

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{3-2i}{\sqrt{26}} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{-3+2i}{\sqrt{26}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{3+2i}{\sqrt{26}} & \frac{-3-2i}{\sqrt{26}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Nota

Si A es una matriz unitaria entonces $|A| = 1$.

En el ejemplo anterior:

$$|A| = \begin{vmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{3-2i}{\sqrt{26}} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{-3+2i}{\sqrt{26}} \end{vmatrix} = (\frac{1+i}{2})(\frac{-6+4i}{\sqrt{26}}) = \frac{-5-i}{\sqrt{26}}$$

$$|A^{-1}| = \begin{vmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{3+2i}{\sqrt{26}} & \frac{-3-2i}{\sqrt{26}} \end{vmatrix} = (\frac{1-i}{2})(\frac{-6-4i}{\sqrt{26}}) = \frac{-5+i}{\sqrt{26}}$$

$$|A||A^{-1}| = \frac{(-5-i)(-5+i)}{26} = \frac{26}{26} = 1$$

entonces

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

Nota

1) Se puede comprobar fácilmente que la teoría que se ha desarrollado para las matrices simétricas puede extenderse adecuadamente a las matrices hermitia-

nas reemplazando "transpuesta" por "transpuesta conjugada".

2) Una matriz hermitiana bajo un cambio de base unitario es semejante a una matriz diagonal $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ siendo los λ_i reales.

3) En electrónica y Física Moderna se hace uso extenso de matrices

8.13 Ejercicios propuestos

1) Hallar los valores y vectores propios de la matriz $3A^*$, cuando

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$$

Rpta: $\lambda_1^* = -1,\ \lambda_2^* = 3$

$$\bar{x}_1^* = t\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0, \quad \bar{x}_2^* = r\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, r \neq 0$$

$$f(A^*) = 3A^* \Rightarrow f(\lambda_1^*) = 3(-1) = -3,\ f(\lambda_2^*) = 3(3) = 9$$

Los vectores propios de $f(A^*)$ son los mismos de A^*

2) Hallar los valores y vectores propios de la matriz $(A^*)^{-1}$, si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 5 \end{pmatrix}$$

Rpta: $\lambda_1^* = 8,\ \lambda_2^* = -1$

$$\bar{x}_1^* = t\begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \end{pmatrix}, t \neq 0, \quad \bar{x}_2^* = r\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}, r \neq 0$$

$$f(A^*) = (A^*)^{-1} \Rightarrow f(\lambda_1^*) = \frac{1}{8},\ f(\lambda_2^*) = -1$$

Los vectores propios de $f(A^*)$ son los mismos de A^*

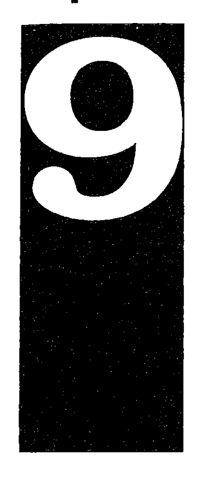
3) Para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix},$$

hallar una matriz unitaria X tal que X^*AX sea una matriz diagonal.

4) Para la matriz del Ejercicio 2 hallar una matriz unitaria X tal que X^*AX sea una matriz diagonal.

Capítulo



FORMAS CUADRÁTICAS. SECCIONES CÓNICAS EN $\mathbb{R}^2$ Y EN $\mathbb{R}^3$

En este capítulo, veremos cómo los resultados obtenidos en el desarrollo de las matrices simétricas y de los valores característicos se aplican en el estudio de las ecuaciones cuadráticas y de las formas cuadráticas.

Las formas cuadráticas tienen aplicación en muchas áreas de las matemáticas y la física, incluyendo también la estadística, mecánica, investigación de operaciones, programación cuadrática, relatividad y geometría. En esta parte orientaremos nuestro estudio a las aplicaciones geométricas de las formas cuadráticas.

Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una T.L. y $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es la base estándar de $\mathbb{R}^n$ y $T(e_i) = a_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, podemos determinar cómo está definida la T.L. En efecto:

Sea $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n \\ T(\bar{x}) &= x_1T(e_1) + x_2T(e_2) + \cdots + x_nT(e_n) \\ T(\bar{x}) &= a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \end{aligned}$$

es decir T es una **suma de términos lineales**

Consideremos ahora una aplicación $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $Q(\bar{x})$ sea una **suma de términos cuadráticos** o sea una suma de términos de la forma $a_{ij}x_ix_j$. Una aplicación de este tipo se llama una **forma cuadrática**.

Ejemplo 9.1

La expresión $2x^2 - 6xy + y^2$ define una forma cuadrática que puede ser vista como una aplicación $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(\bar{x}) = 2x^2 - 6xy + y^2$ donde

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Entonces la forma cuadrática Q depende de dos variables x e y.

Ejemplo 9.2

La expresión $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 5xy - 4yz$ define una forma cuadrática puesto que si $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $Q(\bar{x}) = x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 5xy - 4yz$ donde

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Entonces la forma cuadrática Q depende de tres variables x, y, z

Ejemplo 9.3

La expresión $3x_1^2 - x_3^2 + x_2x_3 - 4x_1x_4$ se puede usar para definir una forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ tal que $Q(\bar{x}) = 3x_1^2 - x_3^2 + x_2x_3 - 4x_1x_4$ donde

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Nota

Se observa que en una forma cuadrática cada término es de grado 2

Definición 9.1

En una forma cuadrática, un término como $3xy$ se llama **término cruzado** mientras que un término de la forma $5y^2$ se llama **término cuadrado.**

Nota

Veamos ejemplos de formas no cuadráticas.

1) $x^2 + 3y^2 + 1$ no define una forma cuadrática porque el término 1 tiene grado cero.

2) $5x^2 + xy - xyz$ no define una forma cuadrática porque el término xyz tiene grado 3.

3) $3x^2 - y + yz$ no define ni una forma lineal, ni una forma cuadrática.

Ilustramos a continuación que cada una de las formas cuadráticas dadas anteriormente se pueden representar como un producto de matrices. Veamos:

En el Ejemplo 9.1 la forma cuadrática $2x^2 - 6xy + y^2$ se puede expresar como el producto

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

En el Ejemplo 9.2 la forma cuadrática $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 5xy - 4yz$ se puede expresar como el producto

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{5}{2} & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

En el Ejemplo 9.3 la forma cuadrática $3x_1^2 - x_3^2 + x_2x_3 - 4x_1x_4$ se puede expresar como el producto

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Nota

Una forma cuadrática se puede expresar como el producto de las matrices $\bar{x}^T A\bar{x}$ donde la matriz A es una matriz simétrica $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$ $(A = A^T)$.

Definición 9.2

Una aplicación $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una **forma cuadrática** (real) si y solo si existen constantes reales a_{ij} para $i \leq j$ donde $i, j = 1, 2, \ldots, n$ tal que para cada vector columna $\bar{x}$ de orden $n \times 1$ con coordenadas $x_i, i = 1, 2, \ldots, n$ (referida a la base estándar)

$$\begin{aligned} Q(\bar{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\ +a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\ +a_{33}x_3^2 + \cdots + a_{3n}x_3x_n \\ \vdots \\ a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

$Q(\bar{x})$ es una suma de términos de grado 2. Los términos $a_{ij}x_ix_j$ para $i \neq j$ se llaman **términos cruzados** y los términos $a_{ii}x_i^2$ se llaman **términos cuadrados.**

$Q(\bar{x})$ se puede escribir en forma matricial

$$Q(\bar{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ ó } Q(\bar{x}) = \bar{x}^T A\bar{x}$$

Definición 9.3

Dada la forma cuadrática $Q(\bar{x}) = \bar{x}^T A\bar{x}$, la matriz simétrica A se llama **matriz de la forma cuadrática referida a la base estándar para $\mathbb{R}^n$.**

Nota

Nos referimos a $Q(\bar{x})$ como la forma cuadrática, aunque en realidad $Q(\bar{x})$ es el valor de la forma cuadrática para $\bar{x}$.

Ejemplo 9.4

Sea $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida pro $Q(\bar{x}) = 2x^2 - 6xy + y^2$ entonces

$$Q(\bar{x}) = \bar{x}^T A\bar{x} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

donde las coordenadas de $\bar{x}$ están referidas a la base estándar $B = \{e_1, e_2\}$ donde

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si tomamos una nueva base $B' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ donde

$$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

la forma cuadrática $Q(\bar{x})$ también se puede expresar como un producto de matrices referidas a esta base. Entonces:

1) Encontrar la matriz de Q con respecto a la base B'.

2) Utilizando la matriz obtenida en 1, calcular $Q(\bar{x})$ para

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1) Sea P la matriz de transición de la base B' a la base B

$$P : B' \to B$$

$$P = \begin{pmatrix} (\bar{u}_1)_B & (\bar{u}_2)_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Si

$$(\bar{x})_{B'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow P(\bar{x})_{B'} = (\bar{x})_B = \bar{x}$$

$$\bar{x}^T = \left(P(\bar{x})_{B'}\right)^T = \left((\bar{x})_{B'}\right)^T P^T \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} P^T$$

Además si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

es la matriz de Q con respecto a la base estándar B entonces:

$$\begin{aligned} Q(\bar{x}) &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} P^T A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} P^T A P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9.1}$$

donde

$$\begin{aligned} A' = P^T A P &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 18 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

que también es una matriz simétrica.

Luego en (9.1)

$$Q(\bar{x}) = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 18x'^2 + 6x'y' - 3y'^2$$

$$A' = \begin{pmatrix} 18 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

representa la forma cuadrática con respecto a la base B'.

2) En (9.1):

$$Q(\bar{x}) = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} A' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$(\bar{x})_{B'} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}_{B'} = r_1\bar{u}_1 + r_2\bar{u}_2 \Rightarrow (\bar{x})_{B'} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} r_1 + r_2 &= 5 \\ -2r_1 + r_2 &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow r_1 = \frac{1}{3},\ r_2 = \frac{14}{3}$$

Luego:

$$(\bar{x})_{B'} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 14/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$Q(\bar{x}) = Q\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 14/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 14/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 14/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ -13 \end{pmatrix} = -54$$

Comprobando por el método directo:

$$Q(\bar{x}) = Q\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -11 \end{pmatrix} = -54$$

Se obtiene el mismo resultado.

Definición 9.4

Sea $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática y $B' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n\}$ es una base para $\mathbb{R}^n$. **La matriz simétrica A' es la matriz de la forma cuadrática referida a la base** B' si y solo si $Q(\bar{x}) = (\bar{x})^T_{B'} A'(\bar{x})_{B'}$ donde $(\bar{x})_{B'}$ es el vector de coordenadas $\bar{x}$ referido a la base B'.

Teorema 9.1

Sea $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática y sea A la matriz de Q con respecto a la base estándar B, si $B' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n\}$ es una nueva base para $\mathbb{R}^n$ y si P es la matriz de transición de la base B' a la base B, entonces $A' = P^T AP$ es la matriz de Q con respecto a la base B'.

Demostración. Si A es la matriz de Q con respecto a la base estándar B, entonces $Q(\bar{x}) = \bar{x}^T A\bar{x}$ donde A es una matriz simétrica. Sea P la matriz de transición de la base B' a la base B y $(\bar{x})_{B'} = \bar{y}$. Entonces

$$\begin{aligned} P(\bar{x})_{B'} &= (\bar{x})_B \\ P\bar{y} &= \bar{x} \\ (P\bar{y})^T &= \bar{x}^T \\ \bar{y}^T P^T &= \bar{x}^T \end{aligned}$$

$$Q(\bar{x}) = \bar{x}^T A\bar{x} = (\bar{y}^T P^T)A(P\bar{y}) = \bar{y}^T(P^T AP)\bar{y} = \bar{y}^T A'\bar{y}$$

se completa la prueba verificando que A' es simétrica

$$(A')^T = (P^T AP)^T = P^T A^T P = P^T AP = A'$$

puesto que A es simétrica.
En conclusión:

$$Q(\bar{x}) = \bar{y}^T A'\bar{y} = (\bar{x})^T_{B'} A'(\bar{x})'_B$$

◇


Nota

Si tenemos una forma cuadrática $Q(\bar{x})$ y de alguna manera estamos en condiciones de encontrar una nueva base B' de modo que la matriz de Q referida a B' sea una matriz diagonal, entonces los términos cruzados tienen coeficiente cero y por tanto $Q(\bar{x})$ es una suma de términos cuadrados.

Teorema 9.2

Sean $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ y $B' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$ bases para $\mathbb{R}^n$ donde B es la base estándar. Sea $P = (p_{ij})$ la matriz de transición de la base B' a la base B entonces B' es una base ortonormal si y solo si P es una matriz ortogonal.

Demostración. Vamos a demostrar para $\mathbb{R}^3$
Si P es la matriz de transición de la base B' a la base B

$$P = \Big((\bar{u}_1)_B\ (\bar{u}_2)_B\ (\bar{u}_3)_B\Big) = \Big(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\Big)$$

$$\bar{u}_1 = p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + p_{31}e_3 = (p_{11}, p_{21}, p_{31})$$
$$\bar{u}_2 = p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + p_{32}e_3 = (p_{12}, p_{22}, p_{32})$$
$$\bar{u}_3 = p_{13}e_1 + p_{23}e_2 + p_{33}e_3 = (p_{13}, p_{23}, p_{33})$$

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} P^T P &= \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_{11}^2 + p_{21}^2 + p_{31}^2 & \bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2^T & \bar{u}_1 \cdot \bar{u}_3^T \\ \bar{u}_2 \cdot \bar{u}_1^T & p_{12}^2 + p_{22}^2 + p_{32}^2 & \bar{u}_2 \cdot \bar{u}_3^T \\ \bar{u}_3 \cdot \bar{u}_1^T & \bar{u}_3 \cdot \bar{u}_2^T & p_{13}^2 + p_{23}^2 + p_{33}^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde:

$$\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2^T = p_{11}p_{12} + p_{21}p_{22} + p_{31}p_{32} = \bar{u}_2 \cdot \bar{u}_1^T$$
$$\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_3^T = p_{11}p_{13} + p_{21}p_{23} + p_{31}p_{33} = \bar{u}_3 \cdot \bar{u}_1^T$$
$$\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_3^T = p_{12}p_{13} + p_{22}p_{23} + p_{32}p_{33} = \bar{u}_3 \cdot \bar{u}_2^T$$

$$P^T P = I \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{u}_i \cdot \bar{u}_j = 0, \ i \neq j \\ \bar{u}_i \cdot \bar{u}_i = 1 \end{cases}$$

entonces B' es una base ortonormal si y solo si $P^T = P^{-1}$ es decir P es ortogonal. ◇

9.1 Ejercicios propuestos

1) Indicar cuáles de las siguientes expresiones son formas cuadráticas. Si $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para algún n es una forma cuadrática, expresar

$$Q(\bar{x}) = \bar{x}^T A \bar{x}.$$

(a) $x^2 + 6xy + y^2$

Rpta: Si, $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $5x^2 + 3xy - 4$

(c) $xy - 4xz + 5yz$

Rpta: Si, $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -2 \\ 1/2 & 0 & 5/2 \\ -2 & 5/2 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $x^2 - 5xy + 3xz + 8yz + z^2$

(e) $2x^2 - 3yz + 2xyz - 3z^2$

Rpta: No

(f) $x^3 + y^3 - z^3 - 6x^2y + 8z$

(g) $x_1^2 + 5x_1x_2 - 3x_2x_4 + 2x_3x_4 + x_3^2 - x_4^2$

Rpta: Si, $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 & 0 & 0 \\ 5/2 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3/2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2) En los siguientes casos se da la matriz de la forma cuadrática con respecto a la base estándar. Escribir la forma cuadrática como suma de términos de grado 2

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Rpta: $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$Q(\bar{x}) = 3x^2 + 4xy + 5y^2$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Rpta: $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R},\ \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

$$Q(\bar{x}) = x_1^2 + 10x_1x_4 - 2x_2^2 + 6x_2x_4 + 3x_3^2 + 5x_4^2$$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 7 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3) Sea $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática definida por $Q(\bar{x}) = \bar{x}^T A\bar{x}$ donde

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ y } A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

encontrar una matriz simétrica A' tal que

$$Q(\bar{x}) = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} A' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (\bar{x})_{B'} \text{ y } B' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$$

donde

$$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Rpta: $P : B' \to B$ donde $B = \{e_1, e_2\}$ base estándar de $\mathbb{R}^2$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A' = P^T AP = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 109 \end{pmatrix}$$

4) Sea $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática definida por

$$Q(\bar{x}) = \bar{x}^T A\bar{x}, \qquad \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Encontrar una matriz simétrica A' tal que

$$Q(\bar{x}) = \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} A' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ donde } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{B'}$$

y $B' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ donde

$$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \bar{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) Usando A', calcular

$$Q\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

9.2 Diagonalización de formas cuadráticas

Dada la forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(\bar{x}) = ax^2 + bxy + cy^2$, el problema de eliminar el término cruzado xy se convierte en el problema de encontrar una matriz diagonal para Q.

Si $Q(\bar{x}) = \bar{x}^T A\bar{x}$, la matriz de Q referida a la nueva base B' es A' donde $A' = P^T AP$ y P es la matriz de transición de la base B' a la base estándar B.

Queremos encontrar una base B' de modo que la matriz de Q con respecto a la base B' sea una matriz diagonal.

Del estudio de operadores lineales sabemos que B' es una base de vectores característicos de A, entonces la matriz $D = P^{-1}AP$ es una matriz diagonal. El

problema quedará resuelto si P fuera una matriz ortogonal ya que $P^T = P^{-1}$ y $A' = D$.

P es una matriz ortogonal si y solo si B' es una base ortonormal. Por tanto, lo que necesitamos para resolver el problema es una base ortonormal de vectores característicos de la matriz simétrica A.

Nota

Si los valores característicos de A son diferentes, los vectores característicos asociados son mutuamente ortogonales. Si los valores característicos de A se repiten los vectores característicos asociados son L.I. en este caso utilizando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt (en forma abreviada: proceso de G-S)[1] se puede encontrar vectores característicos mutuamente ortogonales.
Luego es relativamente sencillo normalizar los vectores y producir una base ortonormal.

Ejemplo 9.5

Sea la forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(\bar{x}) = 5x^2 + 4xy + 8y^2$.
Encontrar una base ortonormal de modo que la matriz de Q sea diagonal.
En efecto:
$Q(\bar{x}) = \bar{x}^T A\bar{x}$ donde A es la matriz de Q con respecto a la base estándar $B = \{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$.

$$Q(\bar{x}) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

es una matriz simétrica y por tanto es diagonalizable ortogonalmente.
Los valores característicos de A son:

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 36 = 0 \Rightarrow (\lambda - 4)(\lambda - 9) = 0$$

[1]Jörgen Pederson Gram, matemático danés (1850-1916)
Erhard Schmidt, matemático alemán (1876-1959)

$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 9$ son valores característicos de A.

$$\lambda_1 = 4 \to \bar{x}_1 = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\lambda_2 = 9 \to \bar{x}_2 = r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; r \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Los vectores característicos $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ son mutuamente ortogonales.
$B' = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ es una base ortogonal y $B' = \{\frac{\bar{x}_1}{|\bar{x}_1|}, \frac{\bar{x}_2}{|\bar{x}_2|}\}$ es una base ortonormal entonces

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

es una matriz ortogonal ($P^{-1} = P^T$) y es la matriz de transición de la base B' a la base B.
Por tanto:

$$\begin{aligned} P^{-1}AP = P^TAP &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\ &= D = A' \end{aligned}$$

A' es la matriz de Q con respecto a la base B'. Es decir

$$Q(\bar{x}) = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} A' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 4x'^2 + 9y'^2$$

donde

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (\bar{x})'_B$$

Ejemplo 9.6

Sea la forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$Q(\bar{x}) = x^2 + y^2 - 2z^2 - 8xy + 4xz - 4yz$$

Encontrar una base ortonormal de modo que la matriz de Q sea diagonal.
$Q(\bar{x}) = \bar{x}^T A\bar{x}$ donde A es la matriz de Q con respecto a la base estándar $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$

$$Q(\bar{x}) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & 2 \\ -4 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+3)^2(\lambda-6) = 0$$

$$\lambda_1 = -3 = \lambda_2,\ \lambda_3 = 6$$

$$\lambda_1 = -3 \to \bar{x}_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\lambda_2 = -3 \to \bar{x}_2 = r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\lambda_3 = 6 \to \bar{x}_3 = m \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, m \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. Construimos la base ortonormal usando el proceso de G-S

$$\bar{y}_1 = \bar{x}_1 = (1,1,0)$$

$$\bar{y}_2 = \bar{x}_2 - \frac{\bar{x}_2 \cdot \bar{y}_1}{|\bar{y}_1|^2}\bar{y}_1 = (-1,0,2) - \frac{(-1)}{2}(1,1,0) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)$$

$$\bar{y}_3 = \bar{x}_3 - \frac{\bar{x}_3 \cdot \bar{y}_1}{|\bar{y}_1|^2}\bar{y}_1 - \frac{\bar{x}_3 \cdot \bar{y}_2}{|\bar{y}_2|^2}\bar{y}_2 = (2, -2, 1) - 0 - 0 = (2, -2, 1)$$

$\{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3\}$ es una base ortogonal y $B' = \{\frac{\bar{y}_1}{|\bar{y}_1|}, \frac{\bar{y}_2}{|\bar{y}_2|}, \frac{\bar{y}_3}{|\bar{y}_3|}\}$ es una base ortonormal. Entonces

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

es una matriz ortogonal ($P^{-1} = P^T$) y P es la matriz de transición de la base B' a la base B.

Por tanto:

$$P^{-1}AP = P^TAP = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = A'$$

A' es la matriz de Q con respecto a la base B'.

Es decir

$$Q(\bar{x}) = \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} A' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$= -3x'^2 - 3y'^2 + 6z'^2, \text{ donde } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (\bar{x})_{B'}$$

Definición 9.5

Una matriz simétrica A se dice que es **definida positiva** si y solo si todos sus valores característicos son positivos.

Definición 9.6

Una forma cuadrática se llama **definida positiva** si su matriz es definida positiva.

Ejemplo 9.7

La forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(\bar{x}) = 5x^2 - 4xy + 8y^2$ es definida positiva puesto que la matriz de Q respecto a la base estándar es

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

y los valores característicos de A son $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 9$

9.3 Secciones cónicas en $\mathbb{R}^2$

La diagonalización de transformaciones lineales que determinan transformaciones semejantes se presentan con frecuencia en las aplicaciones del Álgebra Lineal a la Geometría.

Definición 9.7

Una ecuación de la forma

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{9.2}$$

donde a, b, c, d, e, f son números reales y al menos uno de los números a, b ó c es diferente de cero se llama **ecuación cuadrática** en las variables x e y.

Definición 9.8

La expresión $ax^2 + 2bxy + cy^2$ se denomina **forma cuadrática asociada** a la ecuación cuadrática (9.2)

Ejemplo 9.8

Sea la ecuación cuadrática en dos variables

$$3x^2 + xy - 4y^2 + 7x - 8x + 9 = 0$$

$$a = 3,\ b = \frac{1}{2},\ c = -4,\ d = 7,\ e = -8,\ f = 9$$

Ejemplo 9.9

Ecuación cuadrática	Forma cuadrática asociada
$x^2 - 8xy + 7y^2 - 5x + 3y + 1 = 0$	$x^2 - 8xy + 7y^2$
$9x^2 - 3y^2 + 5x - 9 = 0$	$9x^2 - 3y^2$
$7xy - 3x = 0$	$7xy$

Definición 9.9

Las gráficas de las ecuaciones cuadráticas en x e y se llaman **curvas de 2do grado**.
Las secciones cónicas ($\mathscr{P}, \mathscr{E}, \mathscr{H}, \mathscr{C}$) son curvas de 2do grado ya que satisfacen ecuaciones de la forma (9.2)

Nota

Sin embargo, hay curvas de 2do grado que no son secciones cónicas. Por ejemplo:

1) $x^2+y^2+6x-8y+25 = 0$ no es una cónica puesto que $(x+3)^2+(y-4)^2 = 0$ es un punto, el punto $P = (-3, 4)$.

2) $x^2 - 6xy + 9y^2 + 8x - 24y + 16 = 0$ no es una cónica, puesto que $(x - 3y + 4)^2 = 0$ es una recta $\mathscr{L}: \quad x - 3y + 4 = 0$.

3) $3x^2 - 13xy - 10y^2 = 0$ no es una cónica, puesto que $(x - 5y)(3x + 2y) = 0$

son dos rectas

$$\begin{cases} \mathscr{L}_1: & x - 5y = 0 \\ \mathscr{L}_2: & 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

4) $25x^2 - 10xy + y^2 + 3 = 0$, no es una cónica, puesto que $(5x - y)^2 = -3$ es el conjunto vacío (ningún punto).

Se dice estos casos constituyen los casos **excepcionales** o **degenerados** de las secciones cónicas.
Se prueba que "toda curva de 2do grado es una sección cónica o una sección cónica degenerada".

Nota

Los casos de degeneración son:

1) **Para la elipse** $\mathscr{E}$:

- un punto,
- ningún punto.

2) **Para la parábola** $\mathscr{P}$:

- dos rectas paralelas,
- una recta (dos rectas coincidentes),
- ningún punto.

3) **Para la hipérbola** $\mathscr{H}$:

- dos rectas que se cortan

Definición 9.10

Sea la ecuación cuadrática

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{9.3}$$

donde a, b ó c es diferente de cero. $I = b^2 - ac$ se llama **invariante** o **indicador** de la forma cuadrática $ax^2 + 2bxy + cy^2$.

Nota

- Si $I < 0$ entonces (9.3) es la ecuación de una elipse $\mathscr{E}$ o caso degenerado de $\mathscr{E}$.
- Si $I = 0$ entonces (9.3) es la ecuación de una parábola $\mathscr{P}$ o caso degenerado de $\mathscr{P}$.
- Si $I > 0$ entonces (9.3) es la ecuación de una hipérbola $\mathscr{H}$ o caso degenerado de $\mathscr{H}$.

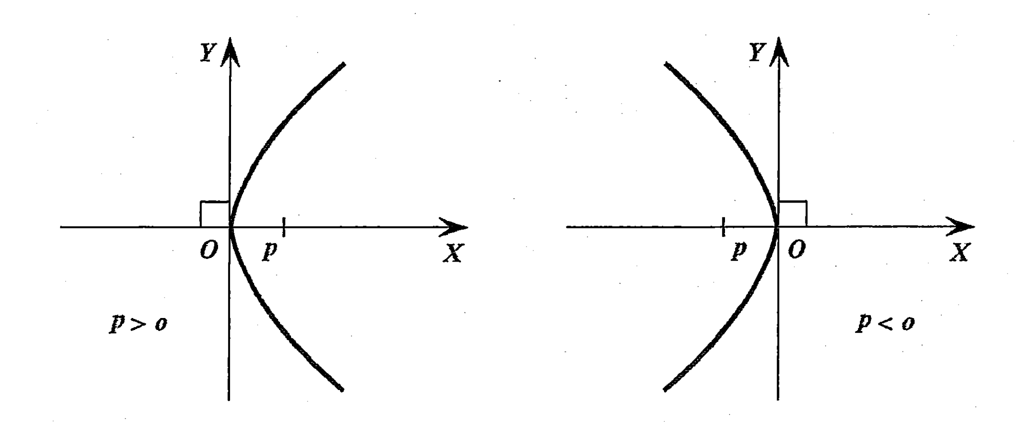
(Revisar el Libro: Geometría Analítica Vectorial, Capítulo 8, de mi autoría)

Definición 9.11

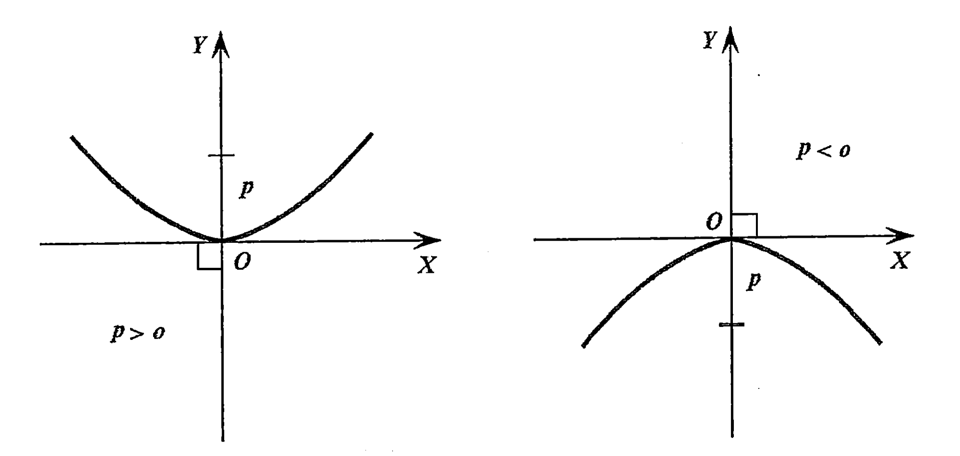
Se dice que una cónica tiene una **posición normal relativa a los ejes coordenados**, si su ecuación se puede expresar en cualquiera de las siguientes formas:

- **$\mathscr{P}$: parábola**

  $\mathscr{P}: \quad y^2 = 4px$, eje $\parallel$ eje X

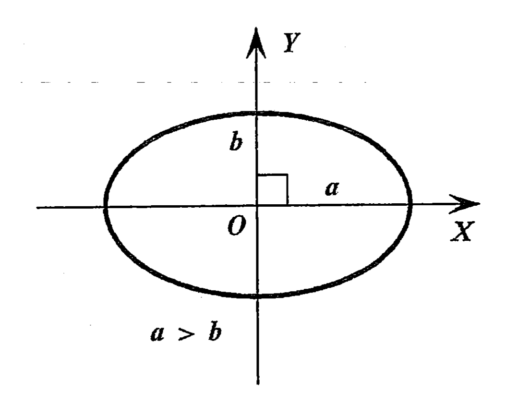


$\mathscr{P}$: $x^2 = 4py$, eje $\parallel$ eje Y

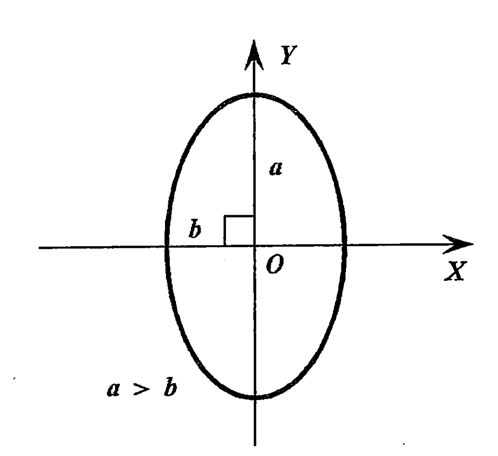


- **$\mathscr{E}$: elipse**

$\mathscr{E}$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, eje $\parallel$ eje X

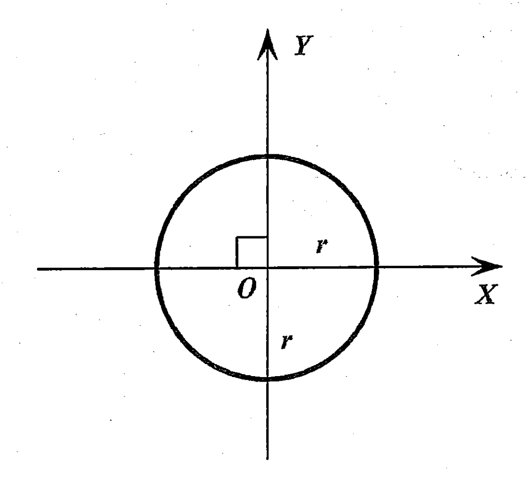


$\mathscr{E}$: $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$, eje $\parallel$ eje Y



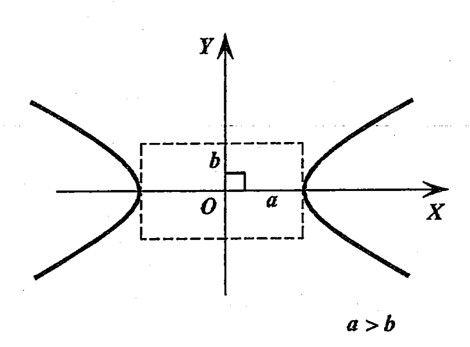
- **$\mathscr{C}$: circunferencia**

$\mathscr{C}: \quad x^2 + y^2 = r^2$

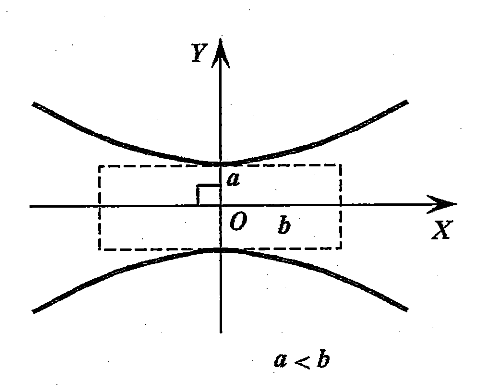


- **$\mathscr{H}$: hipérbola**

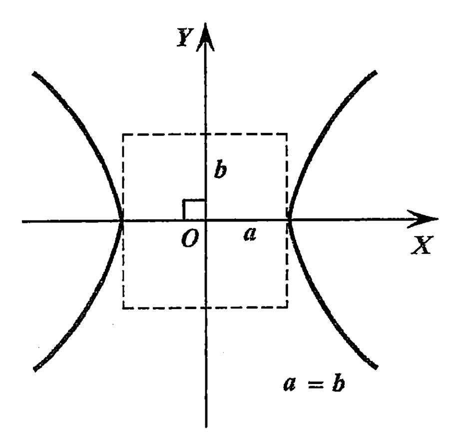
$\mathscr{H}: \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, eje $\parallel$ eje X



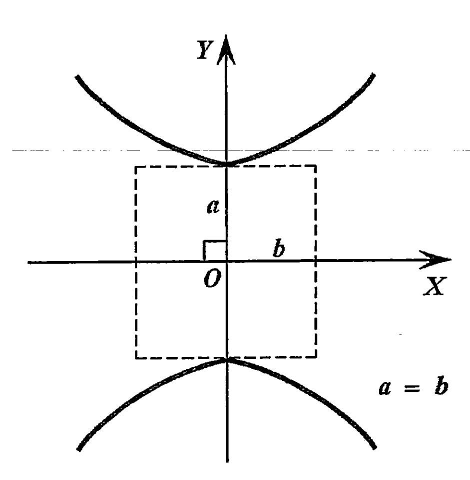
$\mathscr{H}: \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, eje $\parallel$ eje Y



$\mathscr{H}_{\text{eq}}$: $x^2 - y^2 = a^2$, eje $\parallel$ eje X



$\mathscr{H}_{\text{eq}}$: $y^2 - x^2 = a^2$, eje $\parallel$ eje Y



Nota

1) Ninguna cónica en **posición normal relativa** contiene el término cruzado xy (la presencia del término xy en la ecuación de una cónica indica que la cónica se giró con respecto a la posición normal).

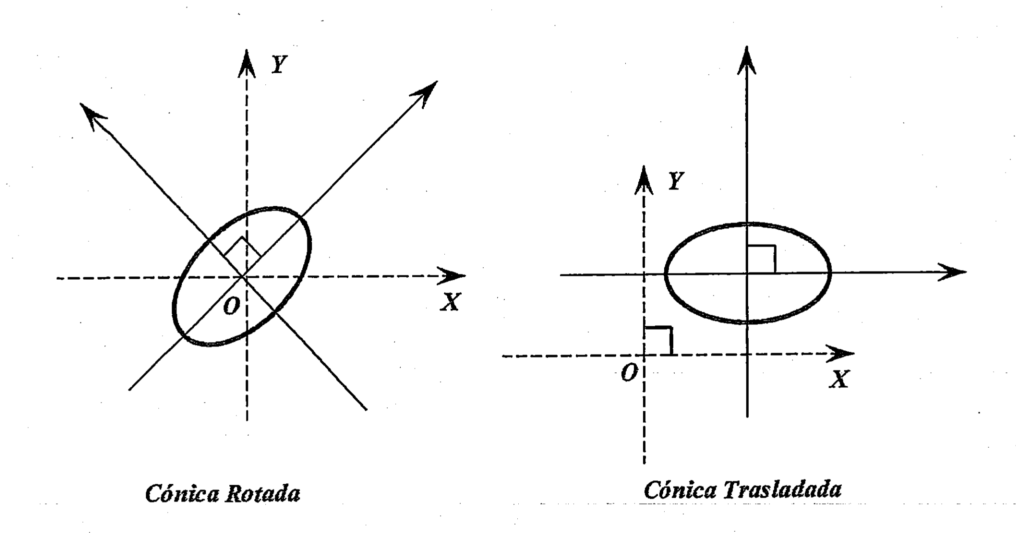
2) Todas las cónicas en **posición normal relativa** no tienen simultáneamente:

- un término en x^2 y otro en x
- ni un término en y^2 y otro en y

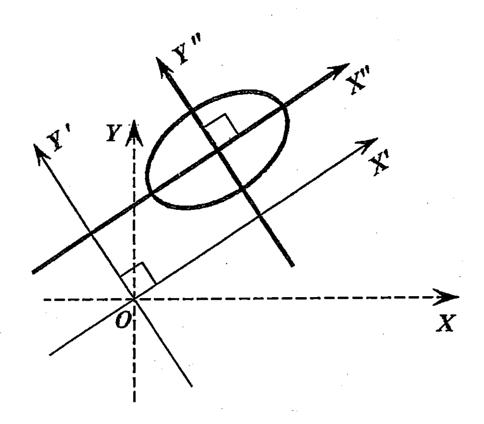
(la presencia simultánea de estos términos cuadrados y lineales en la ecua-

ción de una cónica indica que la cónica se trasladó con respecto a la posición normal).

3) Un método para identificar la gráfica de una cónica que no está en posición normal relativa, consiste en rotar los ejes de coordenadas XY para obtener un sistema de coordenadas $X'Y'$ y luego trasladar los ejes de coordenadas $X'Y'$ para obtener un sistema de coordenadas $X''Y''$ con respecto al cual la cónica está en posición normal



Cónica Rotada *Cónica Trasladada*



Cónica Rotada y Trasladada

Ejemplo 9.10

Graficar la ecuación cuadrática:

$$4x^2 + 9y^2 - 16x + 54y + 61 = 0$$

Se observa que no aparece el término cruzado xy entonces la gráfica se trasladó con respecto a su posición normal, pero no se giró.
Identificamos $a = 4, b = 0, c = 9, d = -16, e = 54, f = 61$

$$I = b^2 - ac = -ac = -36 < 0$$

entonces se trata de una elipse $\mathcal{E}$ ó caso degenerado de $\mathcal{E}$.
Completando cuadrados:

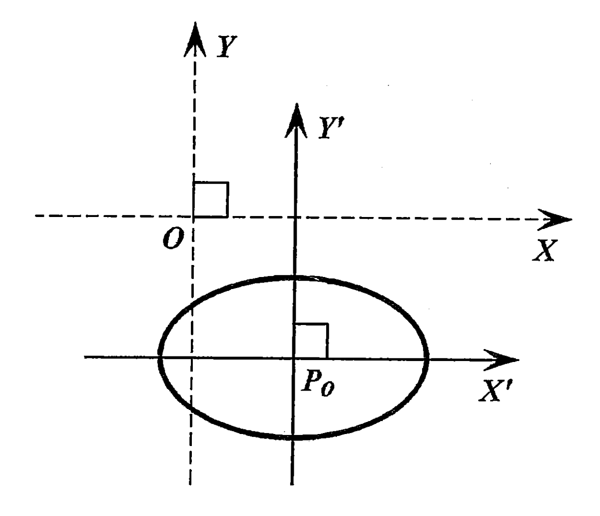
$$4(x-2)^2 + 9(y+3)^2 = -61 + 16 + 81 = 36$$

$$\mathcal{E}: \quad \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$$

es la ecuación de una elipse.
Usando las ecuaciones de traslación de ejes:

$$ET \begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 3 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{E}': \quad \frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

Nuevo origen $P_0 = (2, -3), a^2 = 9, b^2 = 4$, eje $\|$ eje X'



9.4 Representación matricial de la ecuación general de una cónica

Consideremos la ecuación general en las variables x e y

$$az^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{9.4}$$

donde a, b ó c es diferente de cero, que en la forma matricial se expresa así:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0 \tag{9.5}$$

si

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \; R = \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}$$

entonces (9.5) se convierte en:

$$\bar{x}^T A\bar{x} + R\bar{x} + f = 0 \tag{9.6}$$

Con esta notación, la forma cuadrática asociada a (9.4) es $\bar{x}^T A\bar{x}$.

Definición 9.12

La matriz simétrica A se llama **matriz de la forma cuadrática** $\bar{x}^T A\bar{x}$.

Ejemplo 9.11

Forma cuadrática	Matriz de la forma cuadrática
$x^2 - 3xy + 6y^2$	$A = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -3/2 & 6 \end{pmatrix}$
$x^2 - y^2$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
$2xy$	$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

9.5 Regla para eliminar el término cruzado xy en una forma cuadrática mediante una rotación de coordenadas

Sea

$$\mathscr{C} : \bar{x}^T A\bar{x} + R\bar{x} + f = 0 \tag{9.7}$$

una ecuación de 2do grado en el plano XY.

Paso 1. Encontrar la matriz

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

que diagonaliza ortogonalmente a A.

Paso 2. Si es necesario intercambiar las columnas de P de modo que $|P| = 1$. Esto garantiza que

$$\bar{x} = P\bar{x}', \text{ es decir } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{9.8}$$

es una rotación.

Paso 3. Para obtener la ecuación de $\mathscr{C}$ con respecto al sistema $X'Y'$ sustituir (9.8) en (9.7):

$$(P\bar{x}')^T A(P\bar{x}') + R(P\bar{x}') + f = 0$$
$$\bar{x}'^T(P^T AP)\bar{x}' + (RP)\bar{x}' + f = 0 \tag{9.9}$$

Como P diagonaliza ortogonalmente a A entonces

$$P^T AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

donde λ_1 y λ_2 son los valores característicos de A. Luego (9.9) se puede escribir así:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + f = 0$$

Es decir:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0$$

donde

$$\begin{aligned} d' &= dp_{11} + ep_{21} = (d, e) \cdot (p_{11}, p_{21}) \\ e' &= dp_{12} + ep_{22} = (d, e) \cdot (p_{12}, p_{22}) \end{aligned}$$

El siguiente teorema resume el método indicado por la Regla para eliminar el término cruzado xy de la forma cuadrática $\bar{x}^T A \bar{x}$ mediante una rotación de coordenadas.

Teorema 9.3

Sea

$$\mathscr{C}: \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

la ecuación de una cónica y sea

$$\bar{x}^T A \bar{x} = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

la forma cuadrática asociada. Entonces los ejes de coordenadas se pueden rotar de tal manera que la ecuación de $\mathscr{C}$ con respecto al nuevo sistema de coordenadas $X'Y'$ tiene la forma:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0$$

donde λ_1 y λ_2 son los valores característicos de A.
La rotación se puede efectuar mediante la sustitución $\bar{x} = P\bar{x}'$ donde P diagonaliza ortogonalmente a A y $|P| = 1$.

Ejemplo 9.12

Describir la naturaleza de la siguiente curva y graficar

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 42x - 16y + 141 = 0 \tag{9.10}$$

Identificamos las constantes de la ecuación dada:

$$a = 1,\ b = -2,\ c = 4,\ d = -42,\ e = -16,\ f = 141$$
$$I = b^2 - ac = (-2)^2 - 4(1) = 0$$

entonces (9.10) es una $\mathscr{P}$ o caso degenerado de $\mathscr{P}$.
La forma matricial de (9.10) es:

$$\bar{x}^T A\bar{x} + R\bar{x} + f = 0 \tag{9.11}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},\ R = \begin{pmatrix} -42 & -16 \end{pmatrix},\ f = 141,\ \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Encontramos los valores y vectores característicos de A

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 5) = 0$$

entonces

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 5$$

$$\lambda_1 = 0 \to \bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\lambda_2 = 5 \to \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ r \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^2$, entonces:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

es una matriz ortogonal ($P^{-1} = P^T$) y $|P| = 1$ entonces P diagonaliza ortogonalmente a A, es decir

$$P^{-1}AP = P^TAP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

y

$$\bar{x} = P\bar{x}' \tag{9.12}$$

luego

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' \end{cases}$$

son las ecuaciones de rotación de ejes donde el vector de rotación es $\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$.

Reemplazando (9.12) en (9.11):

$$(P\bar{x}')^T A(P\bar{x}') + R(P\bar{x}') + f = 0$$
$$\bar{x}'^T(P^TAP)\bar{x}' + (RP)\bar{x}' + f = 0$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (-42, -16) \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 141 = 0$$

$$\mathscr{P}' : \quad 5y^{12} - 20\sqrt{5}x' + 2\sqrt{5}y' + 141 = 0$$

es una parábola, entonces completando cuadrados:

$$\mathscr{P}' : \quad 5(y' + \frac{\sqrt{5}}{5})^2 = 20\sqrt{5}x' - 141 + 1$$

$$\mathscr{P}' : \quad (y' + \frac{\sqrt{5}}{5})^2 = 4\sqrt{5}(x' - \frac{140}{20\sqrt{5}}) \quad \text{(eje } \| \text{ al eje } X') \tag{9.13}$$

Las ecuaciones de traslación

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{7\sqrt{5}}{5} \\ y'' = y' + \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

cuyo nuevo origen es $P_0' = (\frac{7\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5})$ reducen la Ecuación (9.13) en la ecuación:

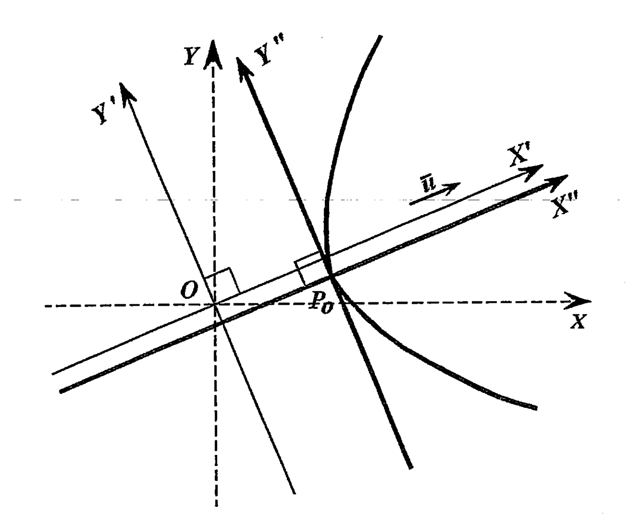
$$\mathscr{P}: \quad y''^2 = 4\sqrt{5}x'' \tag{9.14}$$

(parábola en posición normal relativa en el sistema $X''Y''$).

Se requiere P_0 en el sistema XY, usamos las ecuación de rotación (9.12):

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y' = \frac{2}{\sqrt{5}}(\frac{7\sqrt{5}}{5}) - \frac{1}{\sqrt{5}}(-\frac{\sqrt{5}}{5}) = 3 \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{7\sqrt{5}}{5}) + \frac{2}{\sqrt{5}}(-\frac{\sqrt{5}}{5}) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow P_0 = (3, 1)$$

Por tanto, (9.10) representa la ecuación de una parábola



Ejemplo 9.13

Analizar la naturaleza de la siguiente curva y graficar

$$17x^2 - 16xy + 17y^2 + 66x - 84y - 333 = 0 \tag{9.15}$$

Identificamos las constantes de la ecuación dada:

$$a = 17,\ b = -8,\ c = 17,\ d = 66,\ e = -84,\ f = -333$$
$$I = b^2 - 4ac = 64 - (17)^2 < 0$$

entonces (9.15) es una $\mathscr{E}$ ó caso degenerado de $\mathscr{E}$

La forma matricial de (9.15) es:

$$\bar{x}^T A\bar{x} + R\bar{x} + f = 0 \tag{9.16}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -8 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}, \; R = \begin{pmatrix} 66 & -84 \end{pmatrix}, \; f = -333, \; \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Encontramos los valores y vectores característicos de A

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 17-\lambda & -8 \\ -8 & 17-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 9)(\lambda - 25) = 0$$

entonces $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = 25$.
Se observa que la forma cuadrática asociada $\bar{x}^T A\bar{x}$ es definida positiva puesto que A es definida positiva (sus valores característicos son positivos)

$$\lambda_1 = 9 \rightarrow \bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\lambda_2 = 25 \rightarrow \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^2$, entonces

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

es una matriz ortogonal $P^{-1} = P^T$ y $|P| = 1$ entonces P diagonaliza ortogonalmente a A es decir

$$P^{-1}AP = P^T AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

y

$$\bar{x} = P\bar{x}' \tag{9.17}$$

luego

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \end{cases}$$

son las ecuaciones de rotación de ejes donde el vector de rotación es $\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$
Reemplazando (9.17) en (9.16):

$$(P\bar{x}')^T A(P\bar{x}') + R(P\bar{x}') + f = 0$$

$$(\bar{x}')^T (P^T AP)\bar{x}' + (RP)\bar{x}' + f = 0$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 66 & -84 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 333 = 0$$

$$\mathscr{E}' : \quad 9x'^2 + 25y'^2 - 9\sqrt{2}x' - 75\sqrt{2}y' - 333 = 0$$

es una elipse entonces completando cuadrados:

$$9(x' - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + 25(y' - \frac{3}{2}\sqrt{2})^2 = 450$$

$$\frac{(x' - \frac{\sqrt{2}}{2})^2}{50} + \frac{(y' - \frac{3}{2}\sqrt{2})^2}{18} = 1 \quad (\text{eje} \parallel \text{al eje } X') \tag{9.18}$$

Las ecuaciones de traslación

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y'' = y' - \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

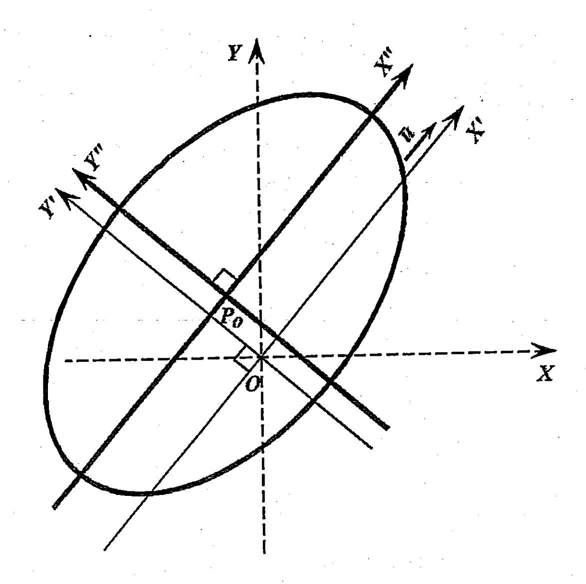
cuyo nuevo origen es: $P_0' = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$ reducen la Ecuación (9.18) en la ecuación

$$\mathscr{E}'' : \frac{x''^2}{50} + \frac{y''^2}{18} = 1 \tag{9.19}$$

(elipse en posición normal relativa en el sistema $X''Y''$)
Se requiere P_0 en el sistema XY, usamos las ecuaciones de rotación (9.17)

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\sqrt{2}}{2}) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{3\sqrt{2}}{2}) = -1 \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{3\sqrt{2}}{2}) = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow P_0 = (-1, 2)$$

Por lo tanto (9.15) representa la ecuación de una elipse.



Ejemplo 9.14

Estudiar la naturaleza de la siguiente curva y graficar

$$3x^2 - 12xy - 13y^2 - 60x + 20y + 350 = 0 \tag{9.20}$$

Identificamos las constantes de la ecuación dada:

$$a = 3,\ b = -6,\ c = -13,\ d = -60,\ e = 20,\ f = 350$$
$$I = b^2 - 4ac = 36 + 39 > 0$$

entonces (9.20) es una $\mathscr{H}$ o caso degenerado de $\mathscr{H}$.
La forma matricial de (9.20) es:

$$\bar{x}^T A\bar{x} + R\bar{x} + f = 0 \tag{9.2}$$

donde:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -6 & -13 \end{pmatrix},\ R = \begin{pmatrix} -60 & 20 \end{pmatrix},\ f = 350,\ \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Encontramos los valores y vectores característicos de A.

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -6 \\ -6 & -13-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 15)(\lambda - 5) = 0$$
$$\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = -15$$

$$\lambda_1 = 5 \Rightarrow \bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\lambda_2 = -15 \Rightarrow \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ r \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^2$, entonces

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

es una matriz ortogonal $P^{-1} = P^T$ y $|P| = -1$ entonces intercambiamos las columnas de P puesto que el determinante de P debe ser igual a 1, luego

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

y $|P| = 1$ entonces P diagonaliza ortogonalmente a A.
Es decir:

$$P^{-1}AP = P^TAP = D = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

y

$$\bar{x} = P\bar{x}' \tag{9.22}$$

luego

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}}x' - \frac{3}{\sqrt{10}}y' \\ y = \frac{3}{\sqrt{10}}x' + \frac{1}{\sqrt{10}}y' \end{cases}$$

son las ecuaciones de rotación de ejes donde el vector de rotación es $\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3)$.
Reemplazando (9.22) en (9.21):

$$(P\bar{x}')^T A(P\bar{x}') + R(P\bar{x}') + f = 0$$
$$\bar{x}'^T(P^TAP)\bar{x}' + (RP)\bar{x}' + f = 0$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -15 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -60 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 350 = 0$$

$$-15x'^2 + 5y'^2 + \frac{200}{\sqrt{10}}y' + 350 = 0$$

$$\mathscr{H}': \quad 3x'^2 - y'^2 - 4\sqrt{10} - 70 = 0$$

es una hipérbola, entonces completando cuadrados:

$$3x'^2 - (y' + 2\sqrt{10})^2 = 70 - 40 = 30$$

$$\mathscr{H}': \quad \frac{x'^2}{10} - \frac{(y' + 2\sqrt{10})^2}{30} = 1 \quad (\text{eje} \parallel \text{al eje } X') \tag{9.23}$$

Las ecuaciones de traslación

$$\begin{cases} x'' &= x' \\ y'' &= y' + 2\sqrt{10} \end{cases}$$

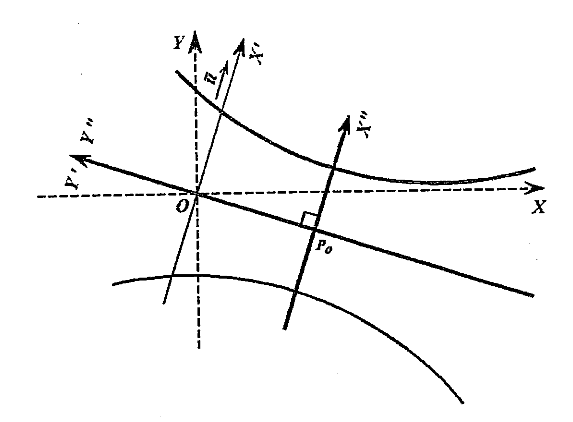
cuyo nuevo origen es $P_0' = (0, -2\sqrt{10})$ reducen la Ecuación (9.23) en la ecuación:

$$\mathscr{H}'': \quad \frac{x''^2}{10} - \frac{y''^2}{30} = 1 \tag{9.24}$$

(hipérbola en posición normal relativa en el sistema $X''Y''$).
Se requiere P_0 en el sistema XY, usaremos las ecuaciones de rotación (9.22)

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{10}}x' - \frac{3}{\sqrt{10}}y' = \frac{1}{\sqrt{10}}(0) - \frac{3}{\sqrt{10}}(-2\sqrt{10}) = 6 \\ y &= \frac{3}{\sqrt{10}}x' + \frac{1}{\sqrt{10}}y' = \frac{3}{\sqrt{10}}(0) - \frac{1}{\sqrt{10}}(-2\sqrt{10}) = -2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow P_0 = (6, -2)$$

Por lo tanto (9.20) representa la ecuación de una hipérbola.



Ejemplo 9.15

Discutir la naturaleza de la siguiente curva y graficar

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 - 20x - 30y + 25 = 0 \qquad (9.25)$$

Identificamos las constantes de la ecuación dada:

$$a = 4,\ b = 6,\ c = 9,\ d = -20,\ e = -30,\ f = 25$$
$$I = b^2 - ac = 36 - 36 = 0$$

entonces (9.25) es una $\mathscr{P}$ o caso degenerado de $\mathscr{P}$.
La forma matricial de (9.25) es:

$$\bar{x}^T A\bar{x} + R\bar{x} + f = 0 \qquad (9.26)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix},\ R = \begin{pmatrix} -20 & -30 \end{pmatrix},\ f = 25,\ \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Encontramos los valores y vectores característicos de A

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 \\ 6 & 9-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 13) = 0$$

entonces $\lambda_1 = 13,\ \lambda_2 = 0$

$$\lambda_1 = 13 \rightarrow \bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\lambda_2 = 0 \rightarrow \bar{x}_2 = r \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^2$, entonces:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & -\frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$

y $|P| = 1$ entonces P diagonaliza ortogonalmente a A.
Es decir:

$$P^{-1}AP = P^T AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

y

$$\bar{x} = P\bar{x}' \tag{9.27}$$

luego

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & -\frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{13}}x' - \frac{3}{\sqrt{13}}y' \\ y = \frac{3}{\sqrt{13}}x' + \frac{2}{\sqrt{13}}y' \end{cases}$$

son las ecuaciones de rotación de ejes donde el vector de rotación es $\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{13}}(2,3)$.
Reemplazando (9.27) en (9.26)

$$(P\bar{x}')^T A(P\bar{x}') + R(P\bar{x}') + f = 0$$
$$\bar{x}'^T(P^T AP)\bar{x}' + (RP)\bar{x}' + f = 0$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -20 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & -\frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 25 = 0$$

$$13x'^2 - \frac{130}{\sqrt{13}}x' + 25 = 0$$
$$13x'^2 - 10\sqrt{13}x' + 25 = 0$$

Completando cuadrados:

$$13(x' - \frac{5\sqrt{13}}{13})^2 = 0 \Rightarrow (x' - \frac{5\sqrt{13}}{13})^2 = 0 \tag{9.28}$$

entonces

$$x' - \frac{5\sqrt{13}}{13} = 0 \tag{9.29}$$

es una recta vertical en $X'Y'$.

Despejando x', y' de las ecuaciones de rotación (9.27):

$$\begin{cases} x' = \frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y \\ y' = -\frac{3}{\sqrt{13}}x + \frac{2}{\sqrt{13}}y \end{cases}$$

Reemplazando en (9.29):

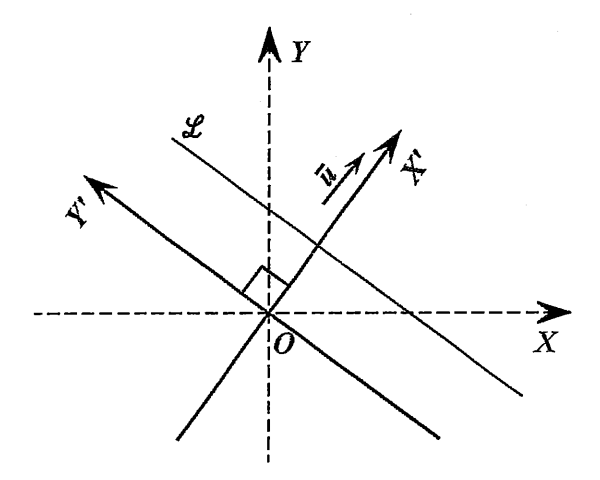
$$\frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{5}{\sqrt{13}} = 0$$

entonces

$$\mathscr{L} : 2x + 3y - 5 = 0 \tag{9.30}$$

este es un caso excepcional o degenerado de la parábola.

La parábola se reduce a una recta.



Ejemplo 9.16

Estudiar la naturaleza de la siguiente curva y graficar

$$17x^2 - 12xy + 8y^2 - 22x - 4y + 13 = 0 \tag{9.31}$$

Identificamos las constantes de la ecuación dada:

$$a = 17,\ b = -6,\ c = 8,\ d = -22,\ e = -4,\ f = 13$$
$$I = b^2 - 4ac = 36 - 17(8) < 0$$

entonces (9.31) es una $\mathscr{E}$ o caso degenerado de $\mathscr{E}$

$$\bar{x}^T A\bar{x} + R\bar{x} + f = 0 \tag{9.32}$$

donde:

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix},\ R = \begin{pmatrix} -22 & -4 \end{pmatrix},\ f = 13,\ \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Encontramos los valores y vectores característicos de A

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 17-\lambda & -6 \\ -6 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda - 20) = 0$$

$$\lambda_1 = 5 \rightarrow \bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} - \{0\}$$
$$\lambda_2 = 20 \rightarrow \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$\bar{x}_1, \bar{x}_2$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^2$, entonces

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

y $|P| = 1$ entonces P diagonaliza ortogonalmente a A.
Es decir

$$P^{-1}AP = P^T AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

y

$$\bar{x} = P\bar{x}' \tag{9.33}$$

luego

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' \end{cases}$$

son las ecuaciones de rotación de ejes, donde el vector de rotación es $\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$
Reemplazando (9.33) en (9.32)

$$(P\bar{x})^T A(P\bar{x}') + R(P\bar{x}') + f = 0$$
$$\bar{x}'^T(P^T AP)\bar{x}' + (RP)\bar{x}' + f = 0$$
$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -22 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 13 = 0$$
$$5x'^2 + 20y'^2 - 6\sqrt{5}x' + 8\sqrt{5}y' + 13 = 0$$

Completando cuadrados:

$$5(x' - \frac{3\sqrt{5}}{5})^2 + 20(y' + \frac{4\sqrt{5}}{20})^2 = -13 + 9 + 4 = 0$$
$$(x' - \frac{3\sqrt{5}}{5})^2 + 4(y' + \frac{\sqrt{5}}{5})^2 = 0 \qquad (9.34)$$

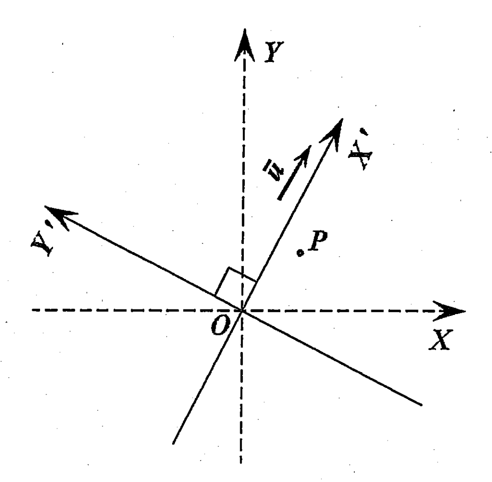
representa el punto

$$P' = (\frac{3\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5})$$

en el sistema $X'Y'$.
Usamos las ecuaciones de rotación de ejes (9.33) para expresar P' es el sistema XY

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{3\sqrt{5}}{5}) - \frac{2}{\sqrt{5}}(-\frac{\sqrt{5}}{5}) = 1 \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' = \frac{2}{\sqrt{5}}(\frac{3\sqrt{5}}{5}) + \frac{1}{\sqrt{5}}(-\frac{\sqrt{5}}{5}) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow P = (1, 1)$$

es un caso excepcional o degenerado de elipse. La ecuación de la elipse se reduce a un punto



Ejemplo 9.17

Estudiar la naturaleza de la siguiente curva y graficar

$$7x^2 - 6xy - y^2 + 28x - 12y + 28 = 0 \tag{9.35}$$

Identificamos las constantes de la ecuación dada:

$$a = 7,\ b = -3,\ c = -1,\ d = 28,\ e = -12,\ f = 28$$
$$I = b^2 - 4ac = 9 + 7 > 0$$

entonces (9.35) es una $\mathscr{H}$ o caso degenerado de $\mathscr{H}$.
La forma matricial de (9.35) es:

$$\bar{x}^T A\bar{x} + R\bar{x} + f = 0 \tag{9.36}$$

donde:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix},\ R = \begin{pmatrix} 28 & -12 \end{pmatrix},\ f = 28,\ \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Encontramos los valores y vectores característicos de A

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -3 \\ -3 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$(\lambda - 8)(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 8,\ \lambda_2 = -2$$

$$\lambda_1 = 8 \to \bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\lambda_2 = -2 \rightarrow \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ entonces:

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

es una matriz ortogonal ($P^{-1} = P^T$) y $|P| = -1$ entonces intercambiamos las columnas de P puesto que el determinante de P debe ser igual a 1, luego

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

y $|P| = 1$ entonces P diagonaliza ortogonalmente a A.
Es decir

$$P^{-1}AP = P^TAP = D = \begin{pmatrix}\lambda_2 & 0\\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix}$$

y

$$\bar{x} = P\bar{x}' \tag{9.37}$$

luego

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}}x' - \frac{3}{\sqrt{10}}y' \\ y = \frac{3}{\sqrt{10}}x' + \frac{1}{\sqrt{10}}y' \end{cases}$$

son las ecuaciones de rotación de ejes donde el vector de rotación es $\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)$.
Reemplazando (9.37) en (9.36)

$$\begin{aligned}(P\bar{x}')^T A(P\bar{x}') + R(P\bar{x}') + f &= 0\\ \bar{x}'^T(P^TAP)\bar{x}' + (RP)\bar{x}' + f &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}x' & y'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}28 & -12\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} + 28 = 0$$

:

$$-2x'^2 + 8y'^2 - \frac{4}{5}\sqrt{10}x' - \frac{48}{5}\sqrt{10}y' + 28 = 0$$
$$5x'^2 - 20y'^2 + 2\sqrt{10}x' + 24\sqrt{10}y' - 70 = 0$$

Completando cuadrados:

$$5(x' + \frac{\sqrt{10}}{5})^2 - 20(y' - \frac{12\sqrt{10}}{20})^2 = 70 + 2 - 72 = 0$$
$$(x' + \frac{\sqrt{10}}{5})^2 - 4(y' - \frac{3\sqrt{10}}{5})^2 = 0$$
$$x' + \frac{\sqrt{10}}{5} = 2(y' - \frac{3\sqrt{10}}{5}) \quad \text{y} \quad x' + \frac{\sqrt{10}}{5} = -2(y' - \frac{3\sqrt{10}}{5})$$

$$\mathscr{L}_1' : \quad x' - 2y' + \frac{7}{5}\sqrt{10} = 0 \quad \text{y} \quad \mathscr{L}_2' : \quad x' + 2y' - \sqrt{10} = 0 \qquad (9.38)$$

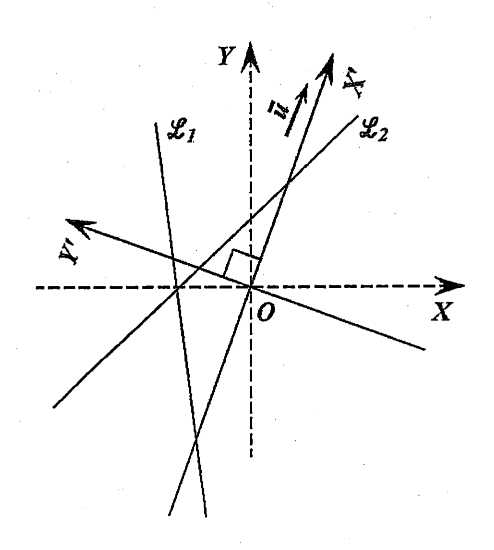
son dos rectas que se intersecan.
Usaremos las ecuaciones de rotación de ejes (9.37) para expresar $\mathscr{L}_1'$ y $\mathscr{L}_2'$ en el sistema XY.

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{10}}x + \frac{3}{\sqrt{10}}y \\ y' = -\frac{3}{\sqrt{10}}x + \frac{1}{\sqrt{10}}y \end{cases}$$

Reemplazando x', y' en (9.38) tenemos:

$$\mathscr{L}_1 : \quad 7x + y + 14 = 0 \quad \text{y} \quad \mathscr{L}_2 : \quad x - y + 2 = 0$$

es un caso excepcional o degenerado de hipérbola, la ecuación de la hipérbola se degenera en dos rectas que se cortan.



9.6 Ejercicios propuestos

Estudiar la naturaleza de las siguientes curvas. Graficar:

1) $4x^2 + 4y^2 - 8x - 16y - 5 = 0$

Rpta: $\mathscr{C}$: $P_0 = (1,2)$, $r = \frac{5}{2}$

2) $x^2 - 10\sqrt{3}xy + 11y^2 + 16 = 0$

3) $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + y + 2 = 0$

Rpta: $\mathscr{P}$

4) $3x^2 - 10xy + 3y^2 - 32 = 0$

5) $75x^2 - 70xy + 51y^2 + 180x - 188y - 464 = 0$

Rpta: $\mathscr{E}$

6) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 86x - 52y + 41 = 0$

7) $5x^2 + 6xy + 5y^2 + 22x - 6y + 21 = 0$

Rpta: $\mathscr{E}$

8) $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 85x - 30y + 175 = 0$

9) $4xy - 3y^2 = 8$

Rpta: $\mathscr{H}$

10) $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 24x - 12y + 29 = 0$

11) $7x^2 - 48xy - 7y^2 + 70x + 10y + 100 = 0$

Rpta: $\mathscr{H}$

12) $8x^2 + 4xy + 5y^2 = 36$

13) $11x^2 - 24xy + 4y^2 + 6x + 8y - 10 = 0$

Rpta: $\mathscr{H}$

14) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}y + 2 = 0$

15) $2x^2 + 4xy + 5y^2 + 4x + 16y + 2 = 0$

Rpta: $\mathscr{E}$

16) $8x^2 + 8xy - 7y^2 + 36y + 36 = 0$

17) $x^2 - 2xy + y^2 - 8x - 8y = 0$

Rpta: $\mathscr{P}$

18) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 14x - 10y + 15 = 0$

19) $5x^2 - 20xy - 10y^2 + 8x - 4y - 28 = 0$

Rpta: $\mathscr{H}$

20) $x^2 + 6xy + 9y^2 - x - 7y = 0$

21) $116x^2 + 36xy + 89y^2 + 284x - 818y + 329 = 0$

Rpta: $\mathscr{E}$

22) $4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$

23) $4x^2 + 8xy - 2x^2 + 3x + 5y - 12 = 0$

Rpta: $\mathscr{H}$

24) $4x^2 - 4xy + y^2 - 36x - 82y + 481 = 0$

25) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x + 4y - 35 = 0$

Rpta: $\mathscr{P}$: Dos rectas paralelas

26) $15x^2 - 7xy - 2y^2 - 62x + 37y + 19 = 0$

27) $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 12x - 12y + 54 = 0$

Rpta: $\mathscr{E}$: ningún punto

9.7 Superficies cuadráticas

El método de diagonalización de formas cuadráticas en dos variables vamos a generalizar a formas cuadráticas de tres variables.

Definición 9.13

Una ecuación de la forma:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz + j = 0 \quad (9.39)$$

donde $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ son números reales y al menos uno de los números a, b, c, d, e ó f es diferente de cero, se llama **ecuación cuadrática** en las variables x, y, z.

Definición 9.14

La expresión $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$ se denomina **forma cuadrática asociada** a la ecuación cuadrática (9.39)

Ejemplo 9.18

Sea la ecuación cuadrática en las variables x, y, z

$$2x^2 + 5y^2 - z^2 + 2xy - 4xz + 7yz - 3x + 8z = 10$$

$$a = 2,\ b = 5,\ c = -1,\ d = 1,\ e = -2,$$

$$f = \frac{7}{2},\ g = -3,\ h = 0,\ i = 8,\ j = -10$$

Representación matricial de la ecuación cuadrática (9.39)

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + j = 0 \quad (9.40)$$

donde

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}, \ R = \begin{pmatrix} g & h & i \end{pmatrix}$$

entonces (9.40) se convierte en:

$$\bar{x}^T A\bar{x} + R\bar{x} + j = 0 \tag{9.41}$$

Con esta notación, la forma cuadrática asociada a (9.39) es $\bar{x}^T A\bar{x}$

Definición 9.15

La matriz simétrica A se llama **matriz de la forma cuadrática** $\bar{x}^T A\bar{x}$

Ejemplo 9.19

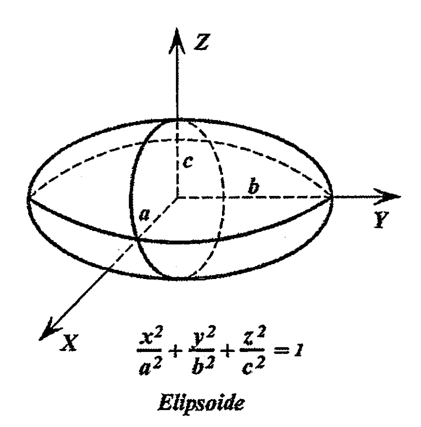
Forma cuadrática	Matriz de la forma cuadrática
$x^2 + 3y^2 - z^2 + 2xy - 3yz$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$
$2x^2 + 5z^2 - 4xy + xz - 2yz$	$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & \frac{1}{2} \\ -2 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 5 \end{pmatrix}$
$xy + xz + yz$	$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

Definición 9.16

Las gráficas de las ecuaciones cuadráticas en tres variables x, y, z se denominan **superficies cuadráticas.**

Definición 9.17

Se dice que una superficie cuadrática tiene una **posición normal relativa** a los ejes coordenados XYZ, si su ecuación se puede expresar en las siguientes formas:



Elipsoide

1) Se llama **ecuación canónica** del **elipsoide** donde $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}-\{0\}, a, b, c$ son los semiejes del elipsoide.

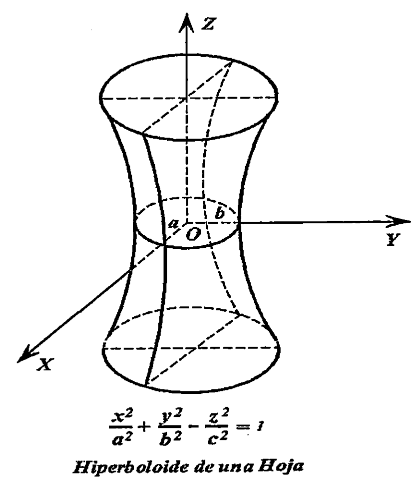
   Elipsoide escaleno si $a \neq b \neq c$.

   Superficie de revolución si dos de ellos son iguales (si $a = b$ el eje de revolución es el eje OZ).

   Elipsoide de revolución alargado si $a = b < c$.

   Elipsoide de revolución achatado o esferoide si $a = b > c$.

   Esfera si $a = b = c = R$ (radio de la esfera).



Hiperboloide de una Hoja

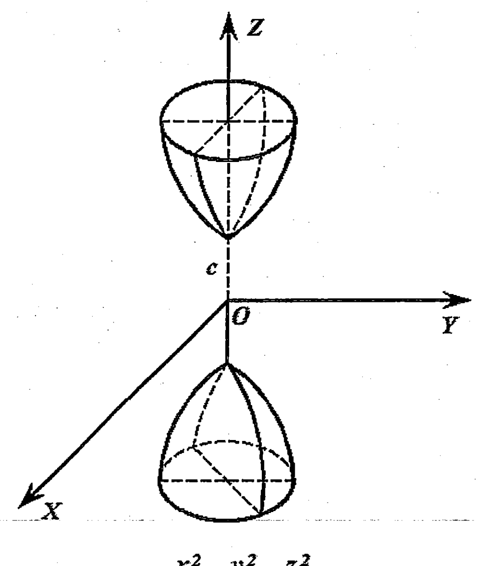
2) Se llama **ecuación canónica** del **hiperboloide de una hoja** donde $\{a,b,c\} \subset \mathbb{R}-\{0\}$.

   a,b y c son los semiejes del hiperboloide.

   En la figura están representados dos de ellos (a y b).

   Si $a=b$,se dice superficie de revolución en torno del eje OZ.

   La figura es una superficie de revolución.



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

Hiperboloide de dos Hojas

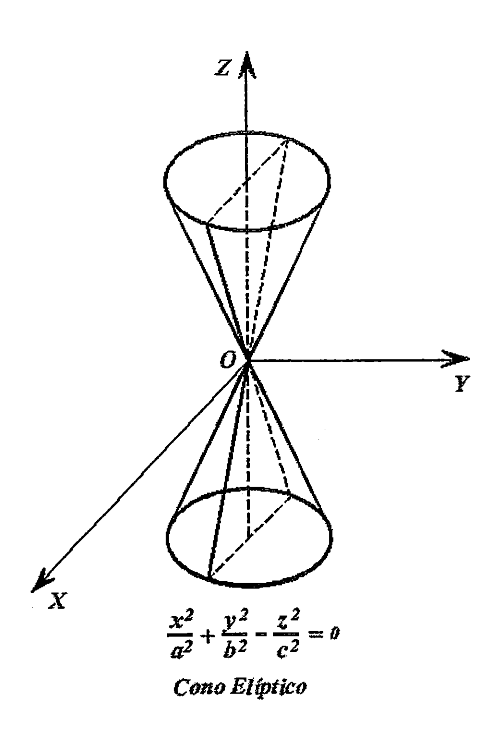
3) Se llama **ecuación canónica** del **hiperboloide de dos hojas**, donde $\{a,b,c\} \subset \mathbb{R}-\{0\}$.

   a,b y c son los semiejes del hiperboloide.

   En la figura está representado solamente uno de ellos (precisamente c).

   Si $a=b$ se dice superficie de revolución en torno del eje OZ.

   La figura es una superficie de revolución.

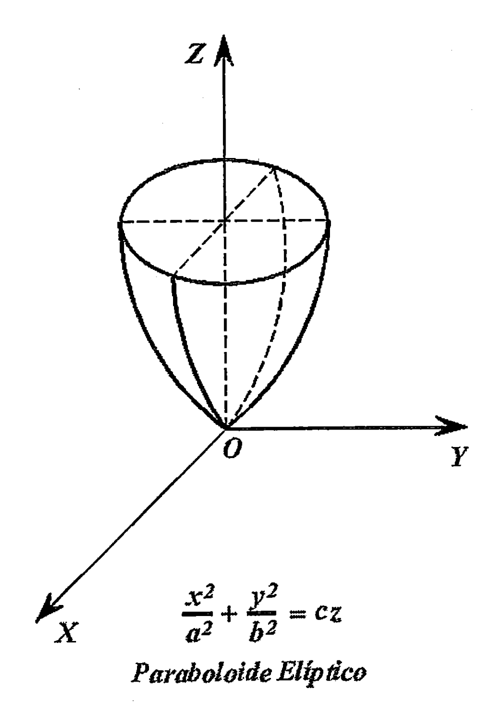


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Cono Elíptico

4) Se llama **ecuación canónica** del **cono elíptico**, donde a, b y c son números reales diferentes de cero.

Si $a = b$ se dice superficie de revolución en torno del eje OZ.



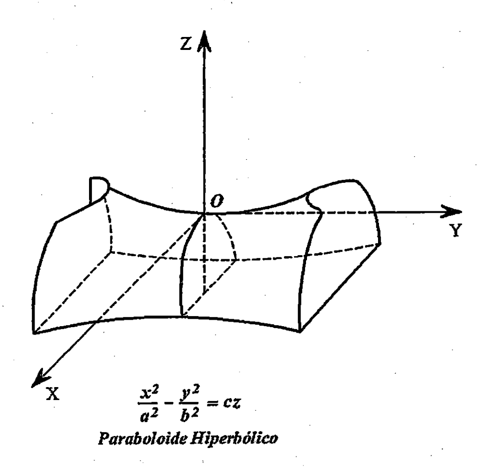
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$$

Paraboloide Elíptico

5) Se llama **ecuación canónica** del **paraboloide elíptico** donde a, b y c son números reales diferentes de cero, a^2 y b^2 se llaman **parámetros** del paraboloide elíptico.

Es una superficie de revolución (en torno de OZ) si $a = b$.

Si $c > 0$ la figura está orientada hacia arriba y si $c < 0$ hacia abajo.

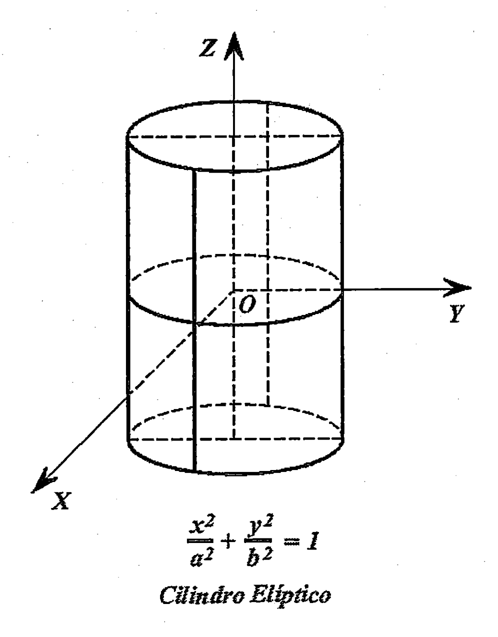


$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$

Paraboloide Hiperbólico

6) Se llama **ecuación canónica** del **paraboloide hiperbólico** donde a, b y c son números reales diferentes de cero, a^2 y b^2 se llaman parámetros del **paraboloide hiperbólico**.

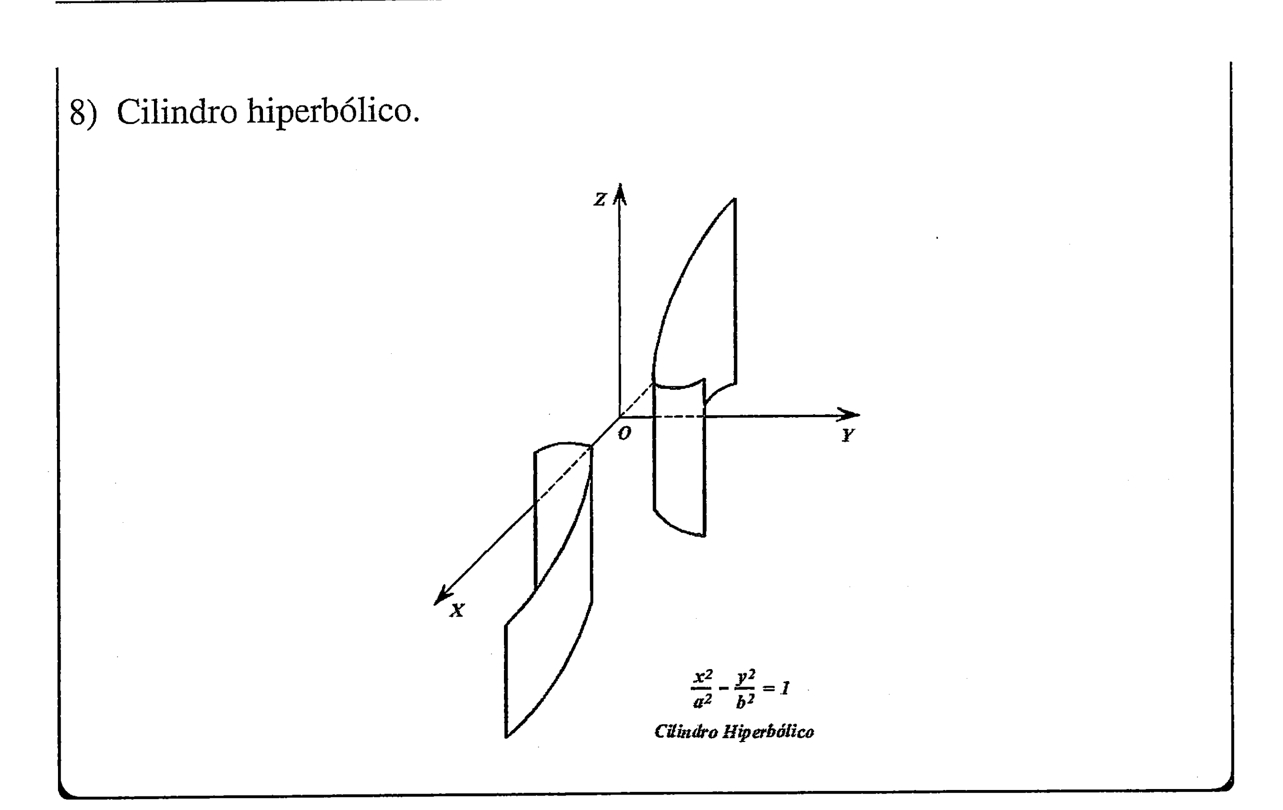
7) Cilindro elíptico.



$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Cilindro Elíptico

8) Cilindro hiperbólico.



Cilindro Hiperbólico

Nota

En las figuras anteriores, aparecen las gráficas de las superficies cuadráticas donde los ejes coordenados están determinados por la base estándar de $\mathbb{R}^3$.

Nota

Enseguida haremos un estudio más detallado de las ecuaciones de estas superficies cuadráticas.

Veamos:

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ **(Elipsoide)**

Si $z = 0$, la sección transversal del gráfico en el plano XY es la elipse

$$\mathscr{E}: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si $y = 0$, la sección transversal del gráfico en el plano XZ es la elipse

$$\mathscr{E}: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Si $x = 0$, la sección transversal del gráfico en el plano YZ es la elipse

$$\mathscr{E}: \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ **(Hiperboloide de una hoja)**

Si $z = 0$, la sección transversal del gráfico en el plano XY es la elipse

$$\mathscr{E}: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si $y = 0$, la sección transversal del gráfico en el plano XZ es la hipérbola

$$\mathscr{H}: \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Si $x = 0$, la sección transversal del gráfico en el plano YZ es la hipérbola

$$\mathscr{H}: \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ **(Hiperboloide de dos hojas)**

Si $z = 0$, la sección transversal del gráfico en el plano XY es la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

que representa el conjunto vacío.

Si $y = 0$, la sección transversal del gráfico en el plano XZ es la hipérbola:

$$\mathscr{H}: \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Si $x = 0$, la sección transversal del gráfico en el plano YZ es la hipérbola:

$$\mathscr{H}: \quad \frac{z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ **(Cono elíptico)**

Si $z = 0$, la sección transversal del gráfico en el plano XY es la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

que representa el punto $(0, 0)$

Si $y = 0$, la sección transversal del gráfico en el plano XZ es la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

que representa dos rectas que se cortan en el origen.

Si $x = 0$, la sección transversal del gráfico en el plano YZ es la ecuación

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

que representa dos rectas que se cortan en el origen.

5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$ **(Paraboloide elíptico)**

Si $z = 0$, la sección transversal del gráfico en el plano XY es la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

que representa el punto $(0,0)$.

Si $y = 0$, la sección transversal del gráfico en el plano XZ es la parábola

$$\mathscr{P}: \quad \frac{x^2}{a^2} = cz$$

Si $x = 0$, la sección transversal del gráfico en el plano YZ es la parábola

$$\mathscr{P}: \quad \frac{y^2}{b^2} = cz$$

6) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$ **(Paraboloide hipérbolico)**

Si $z = 0$, la sección transversal del gráfico en el plano XY es la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

que representa dos rectas que se cortan en el origen.

Si $y = 0$, la sección transversal del gráfico en el plano XZ es la parábola

$$\mathscr{P}: \quad \frac{x^2}{a^2} = cz$$

Si $x = 0$, la sección transversal del gráfico en el plano YZ es la parábola

$$\mathscr{P}: \quad \frac{y^2}{b^2} = -cz$$

7) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **(Cilindro elíptico)**

Si $z=0$, la sección transversal del gráfico en el plano XY es la elipse

$$\mathscr{E}: \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Si $y=0$, la sección transversal del gráfico en el plano XZ es la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}=1 \Rightarrow x=\pm a$$

representa dos rectas paralelas al eje Z.

Si $x=0$, la sección transversal del gráfico en el plano YZ es la ecuación

$$\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y=\pm b$$

representa dos rectas paralelas al eje Z.

8) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ **(Cilindro hiperbólico)**

Si $z=0$, la sección transversal del gráfico en el plano XY es la hipérbola

$$\mathscr{H}: \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Si $y=0$, la sección transversal del gráfico en el plano XZ es la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}=1 \Rightarrow x=\pm a$$

que representa dos rectas paralelas al eje Z.

Si $x=0$, la sección transversal del gráfico en el plano YZ es la ecuación

$$\frac{y^2}{b^2}=-1$$

que representa el conjunto vacío.

Nota

1) El que aparezca uno o más productos xy, xz o yz en la ecuación de una superficie cuadrática (no degenerada) indica que la ecuación se rotó con respecto a la posición normal relativa.

2) En general, si una de las variables aparece en primero y segundo grados simultáneamente, entonces la superficie cuadrática se trasladó con respecto a la posición normal relativa.

Ejemplo 9.20

Describir la superficie cuadrática cuya ecuación es:

$$3x^2 + 4y^2 - 6z^2 - 12x + 8y + 36z - 50 = 0 \tag{9.42}$$

Completando cuadrados:

$$3(x-2)^2 + 4(y+1)^2 - 6(z-3)^2 = 50 + 12 + 4 - 54 = 12$$
$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{3} - \frac{(z-3)^2}{2} = 1$$

Usando las ecuaciones de traslación:

$$ET : \begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 1 \\ z' = z - 3 \end{cases}$$

donde el nuevo origen es $P_0 = (2, -1, 3)$.
La Ecuación (9.42) se transformó en

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{3} - \frac{z'^2}{2} = 1$$

que es la ecuación de un hiperboloide de una hoja.

Nota

El siguiente teorema nos indica que siempre es posible eliminar los términos cruzados xy, xz ó yz de la ecuación de una forma cuadrática mediante una rotación de los ejes de coordenadas.

Teorema 9.4

Sea $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática definida por:

$$Q(\bar{x}) = ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz+gx+hy+iz+j = 0 \quad (9.43)$$

y sea

$$\bar{x}^T A\bar{x} = Ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$$

la forma cuadrática asociada.
Entonces los ejes de coordenadas se pueden girar de modo que la ecuación de Q con respecto al sistema de coordenadas $X'Y'Z'$ tiene la forma:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + g'x' + h'y' + i'z' + j = 0 \quad (9.44)$$

donde λ_1, λ_2 y λ_3 son los valores característicos de A. La rotación se puede efectuar mediante la sustitución $\bar{x} = P\bar{x}'$ donde P diagonaliza ortogonalmente a A y $|P| = 1$.

Demostración. Consideremos la ecuación cuadrática en las variables x, y, z

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz + j = 0 \quad (9.45$$

donde a, b, c, d, e ó f es diferente de cero, que en la forma matricial se expres así:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + j = 0 \quad (9.46$$

donde

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} g & h & i \end{pmatrix}$$

entonces (9.46) se convierte en:

$$\bar{x}^T A\bar{x} + R\bar{x} + j = 0 \tag{9.47}$$

Luego la forma cuadrática asociada a (9.45) es $\bar{x}^T A\bar{x}$, donde A es la matriz de la forma cuadrática $\bar{x}^T A\bar{x}$. Como A es una matriz simétrica entonces A es ortogonalmente diagonalizable. Es decir, existe una matriz

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

que diagonaliza ortogonalmente a A.
Es necesario intercambiar las columnas de P de modo que $|P| = 1$, esto garantiza que $\bar{x} = P\bar{x}'$ es una rotación. Es decir:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

es una rotación.
Si se sustituye $\bar{x} = P\bar{x}'$ en la Ecuación (9.47) se tiene:

$$\begin{aligned} (P\bar{x}')^T A(P\bar{x}') + R(P\bar{x}') + j &= 0 \\ \bar{x}'^T(P^T AP)\bar{x}' + (RP)\bar{x}' + j &= 0 \end{aligned} \tag{9.48}$$

Como P diagonaliza ortogonalmente a A entonces:

$$P^T AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

donde λ_1, λ_2 y λ_3 son los valores característicos de A. Luego (9.48) se puede escribir así:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}' & \bar{y}' & \bar{z}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + j = 0$$

Es decir:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + g'x' + h'y' + i'z' + j = 0 \qquad (9.49)$$

donde:

$$g' = gp_{11} + hp_{21} + ip_{31} = (g,h,i)\cdot(p_{11}, p_{21}, p_{31})$$
$$h' = gp_{12} + hp_{22} + ip_{32} = (g,h,i)\cdot(p_{12}, p_{22}, p_{32})$$
$$i' = gp_{13} + hp_{23} + ip_{33} = (g,h,i)\cdot(p_{13}, p_{23}, p_{33})$$



Nota

Este teorema sugiere el procedimiento para eliminar los términos cruzados de una ecuación cuadrática en x, y y z que se traduce en la siguiente regla.

Regla para eliminar los términos cruzados xy, xz, yz de la ecuación de una superficie cuadrática mediante una rotación de ejes

Sea $\mathscr{C}$: $\bar{x}^T A\bar{x} + R\bar{x} + j = 0$ una ecuación de 2do grado en el espacio XYZ.

Paso 1. Encontrar una matriz P que diagonaliza ortogonalmente a A.

Paso 2. En caso necesario, intercambiar dos columnas de P de modo que $|P| = 1$. Esto garantiza que la transformación ortogonal $\bar{x} = P\bar{x}'$ es una rotación.

Paso 3. Sustituir $\bar{x} = P\bar{x}'$ en (9.49)

Ejemplo 9.21

Describir la superficie cuadrática cuya ecuación es:

$$\mathscr{C}: \quad 2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz - 4 = 0 \qquad (9.50)$$

$a = 2,\ b = 1,\ c = 0,\ d = -2,\ e = 0,\ f = -2,\ g = 0,\ h = 0,\ i = 0,\ j = -4$

La forma matricial de $\mathscr{C}$ es:

$$\bar{x}^T A\bar{x} + R\bar{x} + j = 0 \qquad (9.51)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R = (0,0,0), \qquad \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Encontramos los valores y vectores característicos de A. El polinomio característico de A es:

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-4) = 0$$

$$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 4$$

$$\lambda_1 = -2 \rightarrow \bar{x}_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, t \neq 0$$

$$\lambda_2 = 1 \rightarrow \bar{x}_2 = r \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, r \neq 0$$

$$\lambda_3 = 4 \rightarrow \bar{x}_3 = m \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, m \neq 0$$

$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$, entonces:

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

es una matriz ortogonal ($P^{-1} = P^T$) y $|P| = 1$ entonces P diagonaliza ortogonalmente a A.

Es decir

$$P^{-1}AP = P^TAP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \text{ y } \bar{x} = P\bar{x}' \qquad (9.52)$$

Sustituyendo (9.52) en (9.51):

$$\bar{x}'^T(P^TAP)\bar{x}' + R(P\bar{x}') + j = 0$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} - 4 = 0$$

$$-2x'^2 + y'^2 + 4z'^2 - 4 = 0$$

$$2x'^2 - y'^2 - 4z'^2 = -4$$

entonces

$$\frac{-x'^2}{2} + \frac{y'^2}{4} + z'^2 = 1$$

La gráfica de esta ecuación es un hiperboloide de una hoja.

Nota

1) Si $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $B' = \{\frac{\bar{x}_1}{|\bar{x}_1|}, \frac{\bar{x}_2}{|\bar{x}_2|}, \frac{\bar{x}_3}{|\bar{x}_3|}\}$ son bases de $\mathbb{R}^3$

   P es la matriz de transición de la nueva base B' a la base B ($P : B' \to B$) y $P\bar{x}' = \bar{x}$.

2) Si $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una forma cuadrática. A es la matriz de Q respecto a la base estándar B.

   $A' = P^TAP$ es la matriz de Q respecto a la base B'.

3) Los vectores de B' son unitarios y mutuamente ortogonales (B' es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$) y constituyen los nuevos ejes rotados donde la superficie se encuentra en posición normal relativa.

Ejemplo 9.22

Identifique la siguiente superficie cuadrática $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que

$$Q(\bar{x}) = 3x^2 + 6y^2 + 3z^2 - 4xy - 8xz - 4yz - 14 = 0$$

$a = 3,\ b = 6,\ c = 3,\ d = -2,\ e = -4,\ f = -2,\ g = h = i = 0,\ j = -14$

La forma matricial de Q es:

$$\bar{x}^T A\bar{x} + R\bar{x} + j = 0 \tag{9.53}$$

donde

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad R = (0,0,0) \text{ y } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de A es:

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = -(\lambda - 7)^2(\lambda + 2) = 0$$

entonces

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 7,\ \lambda_3 = -2$$

$$\lambda_1 = 7 \to \bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, t \neq 0$$

$$\lambda_2 = 7 \to \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r \neq 0$$

$$\lambda_3 = -2 \to \bar{x}_3 = m\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, m \neq 0$$

$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ es L.I., entonces usamos el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt

$$\bar{y}_1 = \bar{x}_1 = (-1,2,0)^T$$

$$\bar{y}_2 = \bar{x}_2 - \frac{\bar{x}_2 \cdot \bar{y}_1}{|\bar{y}_1|^2}\bar{y}_1 = (-1,0,1)^T - \frac{1}{5}(-1,2,0)^T = (-\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 1)^T$$

$$\bar{y}_3 = \bar{x}_3 - \frac{\bar{x}_3 \cdot \bar{y}_1}{|\bar{y}_1|^2}\bar{y}_1 - \frac{\bar{x}_3 \cdot \bar{y}_2}{|\bar{y}_2|^2}\bar{y}_2 = (2,1,2)^T - \bar{0} - \bar{0} = (2,1,2)^T$$

$\{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$, entonces

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

es una matriz ortogonal ($P^{-1} = P^T$) y $|P| = 1$, entonces P diagonaliza ortogonalmente a A.
Es decir:

$$P^{-1}AP = P^TAP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \bar{x} = P\bar{x}' \tag{9.54}$$

Sustituyendo (9.54) en (9.53):

$$\bar{x}'^T(P^TAP)\bar{x}' + R(P\bar{x}') + j = 0$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} - 14 = 0$$

$$7x'^2 + 7y'^2 - 2z'^2 = 14$$

entonces

$$\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{2} - \frac{z'^2}{7} = 1$$

La gráfica de esta ecuación es un hiperboloide de una hoja.
La nueva base $B' = \left\{\frac{\bar{y}_1}{|\bar{y}_1|}, \frac{\bar{y}_2}{|\bar{y}_2|}, \frac{\bar{y}_3}{|\bar{y}_3|}\right\}$ es una base ortonormal (vectores unitarios y mutuamente ortogonales) y constituyen los ejes donde la superficie se encuentra en posición normal relativa (ejes principales).

9.8 Ejercicios resueltos

En los siguientes ejercicios se coloca la ecuación dada en su posición normal relativa, se identifica la superficie cuadrática y se determinan los ejes principales.

Ejercicio 9.1

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy = 2$$
$$a = 1,\ b = 1,\ c = 2,\ d = 1,\ e = 0,\ f = 0,\ g = h = i = 0,\ j = -2$$

La forma matricial de la ecuación dada es:

$$\bar{x}^T A\bar{x} + R\bar{x} + j = 0 \tag{9.55}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} g & h & i \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

entonces:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad p(\lambda) = |A - \lambda I| = -\lambda(\lambda - 2)^2 = 0$$

Valores propios de A: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 0$
Vectores propios asociados a λ_i respectivamente:

$$\bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}_3 = m\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \neq 0, r \neq 0, m \neq 0$$

$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$, entonces $\left\{\frac{\bar{x}_1}{|\bar{x}_1|}, \frac{\bar{x}_2}{|\bar{x}_2|}, \frac{\bar{x}_3}{|\bar{x}_3|}\right\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, luego

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

es una matriz ortogonal ($P^{-1} = P^T$) y $|P| = -1$, debemos construir P de modo que $|P| = 1$, entonces

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

diagonaliza ortogonalmente a A. Es decir

$$P^{-1}AP = P^TAP = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y $\bar{x} = P\bar{x}'$ es una rotación de ejes que transforma (9.55) en:

$$\bar{x}'^T(P^TA\bar{x})\bar{x}' + (RP)\bar{x}' + j = 0$$

es decir:

$$\bar{x}'^TD\bar{x}' + (RP)\bar{x}' + j = 0 \tag{9.56}$$

Luego tenemos que

$$2x'^2 + 2z'^2 - 2 = 0 \Rightarrow x'^2 + z'^2 = 1$$

representa un cilindro circular en posición normal relativa con respecto a la nueva base ortonormal:

$$B' = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), (0, 0, 1)\right\}$$

Ejercicio 9.2

$$9x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy = 10 \tag{9.57}$$

$$a = 9,\ b = 6,\ c = 5,\ d = -2,\ e = f = g = h = i = 0,\ j = -10 \tag{9.58}$$

La forma matricial de (9.57) es:

$$\bar{x}^T A\bar{x} + R\bar{x} + j = 0 \tag{9.59}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}, \; R = \begin{pmatrix} g & h & i \end{pmatrix}, \; \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

entonces:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad p(\lambda) = |A - \lambda I| = -(\lambda-5)^2(\lambda-10) = 0$$

Valores propios de A:

$$\lambda_1 = 10, \quad \lambda_2 = 5, \quad \lambda_3 = 5$$

Vectores propios asociados a cada λ_i respectivamente

$$\bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \neq 0, \; \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, r \neq 0, \; \bar{x}_3 = m\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, m \neq 0$$

$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$, entonces $\left\{\frac{\bar{x}_1}{|\bar{x}_1|}, \frac{\bar{x}_2}{|\bar{x}_2|}, \frac{\bar{x}_3}{|\bar{x}_3|}\right\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es una matriz ortogonal ($P^{-1} = P^T$) y $|P| = -1$.
Debemos construir P de modo que $|P| = 1$, entonces

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

diagonaliza ortogonalmente a A.

Es decir

$$P^{-1}AP = P^TAP = D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

y $\bar{x} = P\bar{x}'$ es una rotación de ejes que transforma (9.59) en:

$$\bar{x}'^T D\bar{x}' + (RP)\bar{x}' + j = 0 \tag{9.60}$$

$$5x'^2 + 10y'^2 + 5z'^2 - 10 = 0$$

$$\frac{x'^2}{2} + y'^2 + \frac{z'^2}{2} = 1$$

representa un elipsoide en posición normal relativa respecto a la nueva base

$$B' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejercicio 9.3

$$x^2 + 2yz + 2x + 7y - z + \frac{1}{2} = 0 \tag{9.61}$$

$$a = 1,\ b = c = d = e = 0,\ f = 1,\ g = 2,\ h = 7,\ i = -1,\ j = \frac{1}{2}$$

La forma matricial de (9.61) es:

$$\bar{x}^T A\bar{x} + R\bar{x} + j = 0 \tag{9.62}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} g & h & i \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

entonces

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P(\lambda) = |A - \lambda I| = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = 0$$

Valores propios de A:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -1$$

Vectores propios de A asociados a cada λ_i respectivamente:

$$\bar{x}_1 = t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, t \neq 0, \ \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, r \neq 0, \ \bar{x}_3 = m\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, m \neq 0$$

$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$, entonces $\left\{\frac{\bar{x}_1}{|\bar{x}_1|}, \frac{\bar{x}_2}{|\bar{x}_2|}, \frac{\bar{x}_3}{|\bar{x}_3|}\right\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

$$P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

es una matriz ortogonal ($P^{-1} = P^T$) y $|P| = 1$.
Entonces P diagonaliza ortogonalmente a A, es decir:

$$P^{-1}AP = P^TAP = D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{x} = P\bar{x}'$$

es una rotación de ejes que transforma (9.62) en:

$$\bar{x}'^T D\bar{x}' + (RP)\bar{x}' + j = 0 \tag{9.63}$$

$$x'^2 + y'^2 - z'^2 + x' + 3y' - 4z' + \frac{1}{2} = 0$$

Completando cuadrados

$$(x' + \frac{1}{2})^2 + (y' + \frac{3}{2})^2 - (z' + 2)^2 = -2 \tag{9.64}$$

Considerando la traslación de ejes:

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{1}{2} \\ y'' = y' + \frac{3}{2} \\ z'' = z' + 2 \end{cases}$$

$P_0' = (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -2)^T$ nuevo origen de coordenadas en $X'Y'Z'$.
La Ecuación (9.64) se transforma en

$$x''^2 + y''^2 - z''^2 = -2$$

Es decir:

$$\frac{z''^2}{2} - \frac{y''^2}{2} - \frac{x''^2}{2} = 1$$

representa un hiperboloide de 2 hojas, en posición normal relativa con respecto a la nueva base

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

y a un nuevo origen

$$P_0 = PP_0' = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9.4

$$5x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 8yz = 0 \tag{9.65}$$

$$a = 5,\ b = 3,\ c = 3,\ d = e = 0,\ f = 4,\ g = h = i = j = 0$$

La forma matricial de (9.65) es:

$$\bar{x}^T A\bar{x} + R\bar{x} + j = 0 \tag{9.66}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}, \qquad R = (g, h, i), \qquad \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

entonces:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad p(\lambda) = |A - \lambda I| = -(\lambda - 5)(\lambda - 7)(\lambda + 1) = 0$$

Valores propios de A:

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 7, \quad \lambda_3 = -1$$

Vectores propios de A asociados a cada λ_i respectivamente

$$\bar{x}_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \neq 0, \quad \bar{x}_2 = r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, r \neq 0, \quad \bar{x}_3 = m \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, m \neq 0$$

$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$, entonces $\left\{\frac{\bar{x}_1}{|\bar{x}_1|}, \frac{\bar{x}_2}{|\bar{x}_2|}, \frac{\bar{x}_3}{|\bar{x}_3|}\right\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

es una matriz ortogonal ($P^{-1} = P^T$) y $|P| = 1$.
Entonces P diagonaliza ortogonalmente a A. Es decir:

$$P^{-1}AP = P^TAP = D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{x} = P\bar{x}'$$

es una rotación de ejes que transforma (9.66) en:

$$\bar{x}'^T D\bar{x}' + (RP)\bar{x}' + j = 0 \tag{9.67}$$

$$5x'^2 + 7y'^2 - z'^2 = 0$$

$$\frac{x'^2}{\frac{1}{5}} + \frac{y'^2}{\frac{1}{7}} + z'^2 = 0$$

representa un cono elíptico en posición normal relativa con respecto a la nueva base ortonormal

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejercicio 9.5

$$x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 12x + 18y + 6z + 1 = 0 \qquad (9.68)$$

$a = 1,\ b = 2,\ c = 1,\ d = -1,\ e = 0,\ f = -1,\ g = 12,\ h = 18,\ i = 6,\ j =$

La forma matricial de (9.68) es:

$$\bar{x}^T A\bar{x} + R\bar{x} + j = 0 \qquad (9.69)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} g & h & i \end{pmatrix}, \qquad \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

entonces:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad p(\lambda) = |A - \lambda I| = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

Valores propios de A:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 3$$

Vectores propios de A asociados a cada λ_i respectivamente:

$$\bar{x}_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0,\ \bar{x}_2 = r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r \neq 0,\ \bar{x}_3 = m \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, m \neq 0$$

$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$, entonces $\left\{\frac{\bar{x}_1}{|\bar{x}_1|}, \frac{\bar{x}_2}{|\bar{x}_2|}, \frac{\bar{x}_3}{|\bar{x}_3|}\right\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

es una matriz ortogonal ($P^{-1} = P^T$) y $|P| = 1$.

Entonces P diagonaliza ortogonalmente a A. Es decir:

$$P^{-1}AP = P^TAP = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{x} = P\bar{x}'$$

es una rotación de ejes que transforma (9.69) en:

$$\bar{x}'^T D\bar{x}' + (RP)\bar{x}' + j = 0 \tag{9.70}$$

$$y'^2 + 3z'^2 + 6x' - y' - 3z' + 1 = 0$$

Completando cuadrados

$$(y' - \frac{1}{2})^2 + 3(z' - \frac{1}{2})^2 + 6x' = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 1 = 0 \tag{9.71}$$

Considerando las ecuaciones de traslación de ejes:

$$\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' - \frac{1}{2} \\ z'' = z' - \frac{1}{2} \end{cases}, \qquad P_0' = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$$

nuevo origen de coordenadas en $X'Y'Z'$.

La Ecuación (9.71) se transforma en:

$$y''^2 + 3z''^2 + 6x'' = 0 \Rightarrow y''^2 + \frac{z''^2}{\frac{1}{3}} + 6x'' = 0$$

representa un paraboloide elíptico en posición normal relativa con respecto a la nueva base

$$B' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

y a un nuevo origen

$$P_0 = PP_0' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/6 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9.6

$$3x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 27x + 27y + \frac{1}{8} = 0 \qquad (9.72)$$

$$a = 3,\ b = 2,\ c = 4,\ d = 2,\ e = 2,\ f = 0,\ g = 27,\ h = 27,\ i = 0,\ j = \frac{1}{8} \qquad (9.73)$$

La forma matricial de (9.72) es:

$$\bar{x}^T A\bar{x} + R\bar{x} + j = 0 \qquad (9.74)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} g & h & i \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

entonces:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad p(\lambda) = |A - \lambda I| = (3-\lambda)\lambda(\lambda - 6) = 0$$

Valores propios de A:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 6$$

Vectores propios de A asociados a cada λ_i respectivamente:

$$\bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0,\ \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, r \neq 0,\ \bar{x}_3 = m\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, m \neq 0$$

$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$, entonces $\left\{\frac{\bar{x}_1}{|\bar{x}_1|}, \frac{\bar{x}_2}{|\bar{x}_2|}, \frac{\bar{x}_3}{|\bar{x}_3|}\right\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

$$P = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

es una matriz ortogonal ($P^{-1} = P^T$) y $|P| = 1$.
Entonces P diagonaliza ortogonalmente a A. Es decir:

$$P^{-1}AP = P^TAP = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{x} = P\bar{x}'$$

es una rotación de ejes que transforma (9.74) en:

$$\bar{x}'^T D\bar{x}' + (RP)\bar{x}' + j = 0 \tag{9.75}$$

$$3y'^2 + 6z'^2 + 3y' + 3z' + \frac{1}{8} = 0$$

Completando cuadrados:

$$3(y' - \frac{1}{2})^2 + 6(z' + \frac{3}{2(6)})^2 = \frac{3}{4} + \frac{9}{4(6)} - \frac{1}{8} = 1 \tag{9.76}$$

Considerando las ecuaciones de traslación de ejes:

$$\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' - \frac{1}{2} \\ z'' = z' + \frac{1}{4} \end{cases}, \qquad P_0' = (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4})^T$$

nuevo origen de coordenadas en $X'Y'Z'$.
La Ecuación (9.76) se transforma en

$$3y''^2 + 6z''^2 = 1$$

entonces:

$$\frac{y''^2}{\frac{1}{3}} + \frac{z''^2}{\frac{1}{6}} = 1$$

representa un cilindro elíptico en posición normal relativa con respecto a la nueva base

$$B' = \left\{ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

y a un nuevo origen

$$P_0 = PP_0' = \frac{1}{108}\begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9.7

$$2xy - z^2 - 12z = 1 \tag{9.77}$$

$$a = b = 0,\ c = -1,\ d = 1,\ e = f = g = h = 0,\ i = -12,\ j = -1$$

La forma matricial de (9.77) es

$$\bar{x}^T A \bar{x} + R\bar{x} + j = 0 \tag{9.78}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} g & h & i \end{pmatrix}, \qquad \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

entonces

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad p(\lambda) = |A - \lambda I| = -(\lambda + 1)(\lambda^2 - 1) = 0$$

Valores propios de A:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = -1$$

Vectores propios de A asociados a cada λ_i respectivamente:

$$\bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \neq 0,\ \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, r \neq 0,\ \bar{x}_3 = m\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, m \neq 0$$

$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$, entonces $\left\{\frac{\bar{x}_1}{|\bar{x}_1|}, \frac{\bar{x}_2}{|\bar{x}_2|}, \frac{\bar{x}_3}{|\bar{x}_3|}\right\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es una matriz ortogonal ($P^{-1} = P^T$) y $|P| = 1$.
Entonces P diagonaliza ortogonalmente a A. Es decir:

$$P^{-1}AP = P^TAP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{x} = P\bar{x}'$$

es una rotación de ejes que transforma (9.78) en:

$$\bar{x}'^T D\bar{x}' + (RP)\bar{x}' + j = 0 \tag{9.79}$$

$$x'^2 - y'^2 - z'^2 - 6z' - 1 = 0 \tag{9.80}$$

Completando cuadrados:

$$x'^2 - y'^2 - (z' + 3)^2 = 10 \tag{9.81}$$

Considerando las ecuaciones de traslación de ejes:

$$\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' \\ z'' = z' + 3 \end{cases}, \qquad P_0' = (0, 0, -3)^T$$

nuevo origen de coordenadas en $X'Y'Z'$.
La Ecuación (9.81) se transforma en

$$\frac{x''^2}{10} - \frac{y''^2}{10} - \frac{z''^2}{10} = 1$$

que representa un hiperboloide de dos hojas en posición normal relativa con respecto a la nueva base

$$B' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

y a un nuevo origen

$$P_0 = PP_0' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9.8

$$2xy = 1 \qquad (9.82)$$

$$a = b = c = 0,\ d = 1,\ e = f = g = h = i = 0,\ j = -1$$

La forma matricial de (9.82) es

$$\bar{x}^T A\bar{x} + R\bar{x} + j = 0 \qquad (9.83)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} g & h & i \end{pmatrix}, \qquad \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

entonces:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad p(\lambda) = |A - \lambda I| = -\lambda(\lambda^2 - 1) = 0$$

Valores propios de A:

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -1$$

Vectores propios de A asociados a cada λ_i respectivamente:

$$\bar{x}_1 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0,\ \bar{x}_2 = r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, r \neq 0,\ \bar{x}_3 = m\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, m \neq 0$$

$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$. Entonces $\left\{\frac{\bar{x}_1}{|\bar{x}_1|}, \frac{\bar{x}_2}{|\bar{x}_2|}, \frac{\bar{x}_3}{|\bar{x}_3|}\right\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es una matriz ortogonal ($P^{-1} = P^T$) y $|P| = 1$.
Entonces P diagonaliza ortogonalmente a A. Es decir:

$$P^{-1}AP = P^TAP = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{x} = P\bar{x}'$$

es una rotación de ejes que transforma (9.83) en:

$$\bar{x}'^T D\bar{x}' + (RP)\bar{x}' + j = 0 \tag{9.84}$$

$$y'^2 - z'^2 - 1 = 0 \tag{9.85}$$

entonces $y'^2 - z'^2 = 1$ representa un cilindro hiperbólico en posición normal relativa con respecto a la nueva base

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

9.9 Ejercicios propuestos

1) Encontrar las formas cuadráticas asociadas con las siguientes superficies cuadráticas.

(a) $x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy - 5yz + 7x + 2z = 3$

Rpta: $x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy - 5yz$

(b) $3x^2 + 7z^2 + 2xy - 3xz + 4yz - 3x = 4$

(c) $xy + xz + yz = 1$

Rpta: $xy + xz + yz$

(d) $x^2 + y^2 - z^2 = 7$

(e) $3z^2 + 3xz - 14y + 9 = 0$

Rpta: $3z^2 + 3xz$

(f) $2z^2 + 2xz + y^2 + 2x - y + 3z = 0$

2) Encontrar las matrices de las formas cuadráticas del ejercicio anterior.

Rpta: (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -5/2 \\ 0 & -5/2 & -1 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$,

(e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3/2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

3) Expresar cada una de las ecuaciones cuadráticas del Ejercicio 1 en la forma matricial $\bar{x}^T A\bar{x} + R\bar{x} + j = 0$

Rpta:

(a) $$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -5/2 \\ 0 & -5/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 3 = 0$$

(c) $$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 1 = 0$$

(e) $$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3/2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -14 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 9 = 0$$

4) Identificar las siguientes superficies cuadráticas

(a) $32x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 36 = 0$

Rpta: Elipsoide

(b) $2x^2 + 6y^2 - 3z^2 = 18$

(c) $6x^2 - 3y^2 - 2z^2 - 6 = 0$

Rpta: Hiperboloide de dos hojas

(d) $9x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$

(e) $16x^2 + y^2 = 16z$

Rpta: Paraboloide elíptico

(f) $7x^2 - 3y^2 + z = 0$

(g) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

Rpta: Esfera

5) Mediante un vector de traslación identificar las siguientes superficies cuadráticas.

(a) $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 18x - 144y - 24z + 153 = 0$

Rpta: Elipsoide

(b) $6x^2 + 3y^2 - 2z^2 + 12x - 18y - 8z + 7 = 0$

(c) $3x^2 - 3y^2 - z^2 + 42x + 144 = 0$

Rpta: Hiperboloide de dos hojas

(d) $4x^2 + 9y^2 - z^2 - 54y - 50z - 544 = 0$

(e) $x^2 + 16y^2 + 2x - 32y - 16z + 17 = 0$

Rpta: Paraboloide elíptico

(f) $7x^2 - 3y^2 + 126x + 72y + z + 16 = 0$

(g) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 11$

Rpta: Esfera

6) Determinar una rotación $\bar{x} = P\bar{x}'$ que elimine el término cruzado. Identificar la superficie cuadrática.

(a) $x^2 + y^2 - 2z^2 - 8xy + 4xz - 4yz + 6x - 2y + 5z + k = 0, k = -\frac{41}{24}$

Rpta:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$3x'^2 + 3(y' - \frac{2}{3})^2 - 6(z' - \frac{7}{12})^2 = 1$$

Hiperboloide de una hoja

(b) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 5 = 0$

(c) $144x^2 + 100y^2 + 81z^2 - 216xz - 540x - 720z = 0$

Rpta:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -4/5 & 3/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

$$4x'^2 + 9y'^2 - 36z' = 0$$

Paraboloide elíptico

(d) $2xy + z = 0$

(e) $2xy + 2xz + 2yz - 6x - 6y - 4z + 9 = 0$

Rpta:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$2(x' - \frac{4\sqrt{3}}{3})^2 - (y' + \frac{\sqrt{6}}{3})^2 - z'^2 = 1$$

Hiperboloide de dos hojas

(f) $x^2 + 4y^2 - 4z^2 - 4xy + 3\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y + \frac{5}{4} = 0$

(g) $2xy - 6x + 10y + z - 30 = 0$

Rpta:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(x' + \sqrt{2})^2 - (y' - 4\sqrt{2})^2 + z' = 0$$

Paraboloide hiperbólico

(h) $2x^2 + 2yr + 5z^2 - 4xy - 2xz + 2yz + 10x - 26y - 2z + \frac{389}{9} = 0$

(i) $xy + xz + yz = 0$

Rpta:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$2x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0$$

Cono elíptico

(j) $xy + xz - yz = 0$

(k) $xy - xz - yz = 0$

Rpta:

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$x'^2 - 2y'^2 + z'^2 = 0$$

Cono elíptico

(l) $xy - xz + yz = 0$

7) Rotar y trasladar los ejes de coordenadas para obtener la cuadrática en su posición normal. Determinar su ecuación simplificada

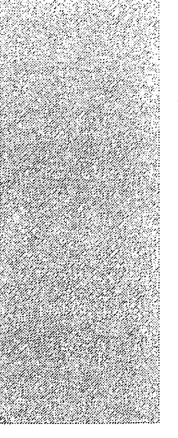
(a) $x^2 + 4y^2 - 4z^2 + 4xy + 12xz - 6yz + k = 0,\ k = \frac{167}{45}$

Rpta: $5x''^2 - 9y''^2 + 5z''^2 = 5$ Hiperboloide de una hoja

(b) $16x^2 + 16y^2 + 13z^2 - 16xz + 24yz + 16x - 24y - 26z - 451 = 0$

(c) $5x^2 + 10y^2 + 13z^2 + 12xy - 6xz + 4yz + 26x + 20y - 38z + 17 = 0$

Rpta: $y''^2 + z''^2 = 2$ cilindro circular



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anton, H. (1976). *Introducción al Álgebra lineal.* Editorial Limusa, S. A.

de Burgos Roman, J. (2006). *Álgebra lineal y geometría cartesiana.* Editorial McGraw-Hill.

Florey, F. (1980). *Fundamentos de Álgebra lineal y aplicaciones.* Editorial Dossat, S. A.

García Cabello, J. (2006). *Álgebra lineal sus aplicaciones en economía, ingenierías y otras ciencias.* Editorial Delta publicaciones.

Gerber, H. (1992). *Álgebra lineal.* Editorial Iberoamérica, S. A. de C. V.

Grossman, S. (1992). *Álgebra lineal con aplicaciones.* Editorial McGraw-Hill.

Hasser, N., La Salle, J., y Sullivan, J. (1973). *Análisis matemático 2.* Editorial Trillas.

Lipschutz, S. (1994). *Álgebra lineal.* Editorial McGraw-Hill.

Sanz, P., José Vásquez, F., y Ortega, P. (1998). *Problemas de Álgebra lineal.* Editorial Prentice Hall. Iberia S. R. L.

Álgebra lineal y aplicaciones
a la geometría. Tomo 2
se terminó de imprimir
en los talleres de Gráfica Fénix SRL
en mayo de 2021